



Analyse d'erreurs de constellations de satellites en termes de positionnement global et d'orbitographie

Ngoc-Dung Luong

► To cite this version:

Ngoc-Dung Luong. Analyse d'erreurs de constellations de satellites en termes de positionnement global et d'orbitographie. Autre. Université Nice Sophia Antipolis, 2015. Français. NNT : 2015NICE4112 . tel-01294647

HAL Id: tel-01294647

<https://theses.hal.science/tel-01294647>

Submitted on 29 Mar 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE NICE-SOPHIA ANTIPOLIS - UFR SCIENCES

École doctorale n° 364 : Sciences Fondamentales et Appliquées

THÈSE

pour obtenir le titre de

Docteur en Sciences

de l'UNIVERSITE de Nice-Sophia Antipolis

Spécialité : Sciences de l'Univers

présentée par

Ngoc-Dung LUONG

**Analyse d'erreurs de constellations de satellites en
termes de positionnement global et d'orbitographie**

et soutenue le 18 Décembre 2015 devant le jury composé de

Olivier JAMET

Richard BIANCALE

Pascal BONNEFOND

Florent DELEFLIE

Laurent SOUDARIN

Pierre EXERTIER

Président

Rapporteur

Rapporteur

Examineur

Examineur

Directeur de Thèse

Travaux effectués au laboratoire GEOAZUR
UMR-CNRS 7329, 06560 Sophia Antipolis, France

ANALYSE D'ERREURS DE CONSTELLATIONS DE SATELLITES EN TERMES DE POSITIONNEMENT GLOBAL ET D'ORBITOGRAPHIE

Résumé : Grâce au développement des techniques spatiales (GNSS, DORIS, laser et le VLBI), la géodésie apporte quantité d'informations sur la forme de la Terre (sa géométrie et sa gravité), sa rotation et son orientation dans l'espace, aux échelles globales comme aux échelles régionales. L'étude des déformations de chaînes de montagne par GPS, des courants marins cartographiés par altimétrie satellitaire, des variations temporelles du champ de gravité, ainsi que l'établissement du repère de référence terrestre international, sont les exemples de l'apport de ces techniques à l'observation de la Terre et au changement global.

Grâce à ces données, la géodésie spatiale a permis de constituer des séries temporelles longues afin de suivre l'évolution lente de nombreux phénomènes à caractère géophysique et/ou océanographique. L'interprétation des variations temporelles a permis de mieux cerner et dimensionner notamment : le rebond post-glaciaire, la tectonique des plaques, les effets de charge continentale, les variations du niveau moyen des mers, les marées, le mouvement du géocentre, les variations régionales de la gravité, la rotation de la Terre, etc. Au plan méthodologique, les travaux sous-jacents se basent sur la dynamique spatiale, c'est-à-dire l'ensemble des méthodes (géométriques, cinématiques et dynamiques) d'élaboration des mouvements orbitaux. C'est un point crucial.

Aujourd'hui en dynamique spatiale, les bilans d'erreur entre données et modèles utilisés sont très faibles, de l'ordre de 1 cm en terme géométrique, soit une part par milliard (1ppb, en anglais) en relatif à l'échelle du globe. Les trajectoires des satellites géodésiques LAGEOS, des satellites altimétriques dont Jason, et des satellites GNSS, notamment, sont déterminées à peu près à ce niveau de précision. D'un autre côté, les produits de la géodésie moderne comme le repère de référence terrestre international, les paramètres de la rotation/orientation de la Terre, et le géoïde sont globalement de qualité sub-centimétrique mais il existe de fortes inhomogénéités spatio-temporelles. Si l'on s'en tient aux objectifs du futur système d'observation global GGOS (*Global Geodetic Observing System*) et son objectif de fournir et maintenir des produits géodésiques de niveau millimétrique, plusieurs questions restent ouvertes. Les réseaux au sol n'ont pas le même niveau de répartition géographique ni la même incertitude de mesure. L'orbitographie des satellites présente encore des

problèmes d'exactitude (GNSS, satellites d'observation de la Terre, etc.) ; le spectre des erreurs est essentiellement à la période de révolution, à la période du jour et aux périodes annuelles et semi-annuelles. Les mesures de poursuite sol-satellite ne sont pas de précision millimétrique. Les modèles (repère et géoïde notamment) présentent encore des inhomogénéités, spatiales et/ou temporelles, par manque de données (les données satellitaires ne sont pas toujours disponibles en continue sur plusieurs années).

Notre travail a pour but de faire un bilan des erreurs résiduelles de la géodésie spatiale, en séparant les causes des effets. Le but est de montrer comment les erreurs d'orbite se propagent d'abord dans la trajectoire, puis dans des produits globaux comme le repère de référence (via les mesures de poursuite de satellites) et la surface topographique (via les mesures altimétriques). Nous avons développé une approche analytique qui traite du transfert des erreurs d'origines géométrique et dynamique. En partant des équations du mouvement orbital, nous proposons une solution analytique d'ordre un du mouvement orbital circulaire, qui est appliquée pour propager les erreurs de modèle dynamique. Ensuite, les résultats sont transférés (ou projetés) sur plusieurs types de fonction de mesure : l'altimétrie, les mesures de distance et les mesures de vitesse radiale. L'originalité de ce travail tient pour beaucoup dans les méthodes purement analytiques qui ont été développées spécifiquement pour effectuer les analyses.

A partir de la bibliographie publiée récemment dans le domaine de la dynamique orbitale, nous établissons un bilan d'erreur amont sur les modèles utilisés (champ de gravité variable et pression de radiation, essentiellement). Compte tenu de la faculté des théories analytiques de fournir des expressions littérales, l'analyse se base donc sur des relations de cause à effet : depuis les erreurs de modèle dynamique et de mesures vers leurs effets sur les produits géodésiques : la surface topographique de l'océan en relation directe avec les erreurs d'orbite d'une part, le repère de référence terrestre au sol d'autre part. Nous envisageons plusieurs cas d'analyse avec Jason-2, Saral, et LA-GEOS, à partir de sources d'erreurs réalistes provenant certes de la dynamique orbitale mais aussi du type des mesures de poursuite utilisées. Ceci nous permet d'apporter un éclairage différent de celui fourni par les méthodes entièrement numérique-empirique généralement utilisées aujourd'hui. Les conclusions tirées de ce travail permettent d'identifier les principales sources d'amélioration encore nécessaires pour gravir l'échelon du millimètre prévu par le projet GGOS, ou encore le projet spatial GRASP proposé par le JPL-NASA et le GRGS.

Mots clés : géodésie spatiale, dynamique orbitale, mesures de poursuite de satellite, analyse d'erreurs

ERROR ANALYSIS OF SATELLITES CONSTELLATIONS IN GLOBAL POSITIONING AND ORBITOGRAPHY TERMS

Abstract : Thanks to the development of space techniques (GNSS, DORIS, laser and VLBI) geodesy provides amount of information to determine and to study the shape of the Earth (its geometry and its gravity), its rotation and orientation in space at global scales as well as at regional scales. The study of crustal deformations by using GPS, the ocean topography by satellite altimetry, the temporal variations of the gravity field (mass transports) as well as the construction and monitoring of the International Terrestrial Reference Frame (ITRF), are some examples of the contribution of these techniques to the Earth observation including the current global change.

Thanks to these data, space geodesy allowed scientists to constitute long temporal series to monitor the slow evolution of many geophysical and oceanographical phenomena. The interpretation of their temporal variations helped to identify and characterize especially : the post-glacial rebound, the plate tectonics, the continental load effects, changes in the mean level sea, amplitude of tides, motion of the geocenter, regional variations of the gravity field, the rotation of the earth, etc. In much cases, the underlying work is based on space dynamics which is a fundamental field. It means the set of methods (geometrical, kinematical and dynamical) that need to be developed and permanently improved in order to accurately modelize the orbital motion of the satellite(s). This is a crucial point.

Today in space dynamics, the global error budget, including data and models, is very small of the order of 1 cm in a geometrical sense or around one part per billion or (1ppb) relative to the earth scale. The trajectory of purely geodetic targets as LAGEOS satellites, of altimeter satellites as Jason, and of GNSS satellites, are determined roughly at this level of precision. In addition, the scientific products of modern geodesy as the ITRF, the Earth Orientation Parameters (EOP) and the geoid are of sub-centimeter quality, even if there are still strong inhomogeneities in space and time. If we consider the future global observing system GGOS (“Global Geodetic Observing System”) which goal is to establish and maintain global geodetic products at the millimeter level, several questions remain open. The ground networks do not provide the same level of geographical distribution nor the same uncertainties. The orbitography of satellites has still problems of accuracy

(GNSS, Jason, etc.) ; the error spectrum of their trajectory is essentially at the period of revolution, at one day and at annual and semi-annual periods. The tracking measurements are not of millimeter accuracy. This is due to the technology itself and to the limit of the propagation modelling of signals through the atmosphere). Finally, the models (reference frame and geoid especially) still contain spatial and/or temporal inhomogeneities due to the lack of data (satellite data are not always available continuously for many years). To this end, some works were developed recently by several authors, Analysis Centers and space agencies in order to identify the remaining problems. But taking into account the complexity of establishing accurate error budgets, due to the number of degree of freedom, it seems to be difficult to only use global numerical methods.

Our work aims to separate causes and consequences. We developed a dedicated approach in which different source of errors, of geometrical and dynamical natures, are treated by analytical expressions. Starting from the dynamical satellite equation of motion, we propose to integrate and propagate the model errors and then to project the results into different measurement functions : altimetry, tracking distances and radial velocities. It results in a complex but comprehensive way that enables the propagation of prediction errors into some general geodetic products as the terrestrial reference frame or the ocean surface topography. The originality of this work lies in the development of a purely analytical method for circular orbits, which has been used to propagate errors from dynamical models. In addition, the resulting orbit errors were projected at the measurement level in order to deduce the impacts on some global geodetic products.

The litterature recently published in the field of orbital dynamics enabled us to calibrate our analytical approach through : i/ the remaining errors or problems in using current solutions of the gravity field including its temporal variations, ii/ the expected errors in the radiation pressure modeling (earth shadow effects), iii/ the current limit of the tracking measurement techniques laser and Doppler (DORIS). All quantities that were inserted in our error analysis have been closely constrained by the current bibliography. We estimated orbit errors and their spatio-temporal effects in two major cases of space geodesy : the impact on the ocean surface topography in relation with the satellite altimeter measurement technique, and the impact on the estimation of terrestrial reference frames for both the laser and DORIS techniques. We considered several orbit cases, as the ones of Jason-2, Saral, and LAGEOS. The conclusions learned from our work help to identify the main sources of improvement necessary to climb the millimeter wall under the GGOS project, or the future space geodesy project GRASP which is currently proposed by JPL-NASA and GRGS.

Key words : space geodesy, satellite dynamics, laser and Doppler tracking techniques, error analysis.

Remerciements

Je voudrais tout d'abord remercier les membres de jury d'avoir jugé mon travail. Merci à M. Richard Biancale et M. Pascal Bonnefond d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ce manuscrit et M. Olivier Jamet d'avoir accepté d'être le président de mon jury de thèse.

J'adresse ma plus reconnaissance à mon directeur de thèse Pierre Exertier d'avoir accepté mon candidat de thèse et m'avoir laissé sur la route de la Géodésie Spatiale avec des connaissances magnifiques. Je le remercie profondément d'avoir été disponible pour me guider tout au long de ma thèse. Grâce à sa direction des cours à partir des premières journées aux suggestions et corrections pour finir ce manuscrit j'ai appris les méthodes et les approches de recherche.

J'adresse également mes remerciements à l'équipe Astrogéo de m'avoir donné une atmosphère amicale avec des cours particuliers de Gilles Métris et Pascal Bonnefond, des soutiens d'informatique de Olivier Laurain, Alexandre Belli et Guillaume Lion. Je n'oublierai jamais aussi les moments inoubliables de pause du café partagé tous les gens de l'équipe.

Je tiens à remercier le laboratoire Géoazur de m'avoir accueilli dans son établissement et aussi pour tout son soutien, sa sollicitude. Merci également aux personnels administratifs, techniques et de la bibliothèque : Jenny, Valérie, Marie-Hélène et Jelena.

Merci à mes amis français avec les matchs de foot et les belles nuits de fête dans leurs maisons. Ce sont des activités inoubliables durant toute la vie d'un étudiant étranger en France.

Merci à mes amis vietnamiens qui ont partagé des voyages intéressants, des moments de nouvel an, des événements spéciaux et m'ont aidé à surmonter les instants les plus durs pendant mon séjour de quatre ans en France.

J'adresse mes remerciements aux projets 322, maintenant 911, du gouvernement du Vietnam qui m'ont offert une occasion d'étudier en France. Je remercie également mes collègues à la faculté des ponts et chaussées de l'école supérieur de génie civil qui m'ont soutenu dans des conditions favorables tout au long de mes études.

Enfin, j'ai une grande pensée pour ma famille, plus particulièrement pour mes parents, ma femme et mon fils qui m'ont toujours suivi et sont toujours le point d'appui de ma vie.

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	La Géodésie Spatiale	1
1.2	Objectif des travaux de recherche	3
1.2.1	Grandes lignes	3
1.2.2	Etapas	3
1.2.3	Apport personnel	4
2	Situation actuelle, état de l’art	7
2.1	Historique récent des modèles de champ de gravité	7
2.1.1	Effets géophysiques globaux	7
2.1.2	Principaux modèles publiés depuis 2000	8
2.1.3	Orbitographie	10
2.2	Travaux d’analyse sur les incertitudes de modèle	12
2.2.1	Incertitudes dans la dynamique	12
2.2.2	Incertitudes dans la “géométrie”	17
2.3	Futur : objectifs GGOS	20
2.4	Conclusion et orientation de nos travaux	21
3	Méthodologie	25
3.1	Dynamique orbitale	25
3.1.1	Les équations fondamentales	26
3.1.2	Théorie quasi-circulaire	28

3.1.3	Théorie de Kaula	39
3.1.4	Conclusion de la dynamique orbitale	41
3.2	Principe de la propagation d'erreurs	43
3.2.1	Les sources d'erreur retenues	44
3.3	Principe du transfert des erreurs	49
3.3.1	Les "cibles" étudiées	49
3.3.2	Erreurs d'origine dynamique	49
3.3.3	Erreurs d'origine géométrique	50
4	Applications des méthodes développées	55
4.1	Origines des erreurs d'orbite	56
4.1.1	Champ de gravité	56
4.1.2	Pression de radiation solaire directe	60
4.2	Propagation des erreurs d'orbite	61
4.2.1	Trajectoires et spectres d'erreurs	61
4.3	Extension géographique de l'erreur radiale d'orbite	65
4.3.1	Différences de modèles	65
4.3.2	Variations périodiques	66
4.3.3	Modèles variables dans le temps	66
4.3.4	Géocentre et pôle	69
4.3.5	Coefficients C/S_{31}	70
4.3.6	Conclusion	72
4.4	Propagation des erreurs dans le repère	73
4.4.1	Cas de Jason-2 (DORIS et laser)	73
4.4.2	Cas de LAGEOS (laser)	79
4.4.3	Conclusion	83
	Conclusion et Perspectives	85

Annexe A Développements et Outils	89
A.1 Rappel, solution de Kaula	89
A.2 Outil de propagation d'orbite	93
A.3 Outil de propagation d'erreurs d'orbite	99
A.4 Outil de calcul des transferts d'erreurs	105
 Table des figures	 116
 Liste des tableaux	 118
 Bibliographie	 119

Glossaire

Aux difficultés de communication habituels, s'ajoutent les classiques abréviations. Ce document comporte les sigles et acronymes suivants :

ASE	Agence Spatiale Européenne (ESA)
CNES	Centre National d'Etudes Spatiales
ECMWF	European Center for Medium range Weather Forecasts
EOP	Earth Orientation Parameter : UT1-UTC, mouvement du pôle (coordonnées x, y) et nutation
GINs	Géodésie par Intégrations Numériques Simultanées
GFZ	German Research Centre for Geosciences
GLDAS	Global Land Data Assimilation Systems
GRGS	Groupe de Recherche de Géodésie Spatiale
IB	Inverse Barometer
IERS	International Earth Rotation and Reference Systems Service
IGN	Institut National de l'information Géographique et forestière
IDS	International DORIS Service
IGS	International GNSS Service
ILRS	International Laser Ranging Service
ITRF	International Terrestrial Reference Frame
IVS	International VLBI Service
JPL	Jet Propulsion Laboratory
NASA	National Aeronautics and Space Administration
OCA	Observatoire de la Côte d'Azur

Les noms de quelques satellites géodésiques et de techniques spatiales associées sont donnés par les sigles et acronymes suivants :

CHAMP	CHAllenging Minisatellite Payload
ERS	Earth Remote sensing Satellite
GOCE	Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer
GRACE	Gravity Recovery And Climate Experiment
LAGEOS	LAser reflecting GEOdynamic Satellite
SPOT	Système Probatoire d'Observation de la Terre
TOPEX	ocean TOPography EXperiment
T/P	TOPEX/Poseidon

DORIS	Doppler Orbitographie et Radio-positionnement Intégrés par Satellite
GNSS	Global Navigation Satellite Systems
GPS	Global Positioning System
SLR	Satellite Laser Ranging
VLBI	Very Long Baseline radio Interferometry

Chapitre 1

Introduction

Sommaire

1.1	La Géodésie Spatiale	1
1.2	Objectif des travaux de recherche	3
1.2.1	Grandes lignes	3
1.2.2	Etapas	3
1.2.3	Apport personnel	4

1.1 La Géodésie Spatiale

Les grands principes de la géodésie spatiale reposent essentiellement sur la dynamique orbitale, donc sur l'estimation du mouvement d'orbite des satellites artificiels. A partir de la connaissance de ces mouvements, le satellite est considéré comme une cible géodésique ou un capteur des forces en présence. Cette cible est ensuite utilisée, comme en géodésie classique par relèvement, pour estimer des coordonnées de points dans l'espace ou de stations au sol y compris à la surface de la mer. Les liens, donc les mesures de distances et vitesses sol-satellite, ou encore satellite-satellite sont assurés par un ensemble de techniques dites spatiales, instruments qui fournissent des mesures de poursuite entre les systèmes considérés.

L'ensemble des satellites accessibles par ces techniques forme une constellation disparate avec de très nombreux objets placés à des altitudes et inclinaisons très différentes. Par exemple, le satellite géodésique laser LAGEOS, placé à 6,000 km d'altitude, est uniquement dédié aux tirs de télémétrie par laser depuis des stations au sol. Les satellites LAGEOS (lancé en 1976) et LAGEOS-2 (lancé plus tard, en 1992) forment actuellement une petite constellation qui est à la base de l'estimation du repère de référence terrestre international par la technique laser.

Les satellites de navigation, dits GNSS à 20,000 km, entrent dans une catégorie spécifique ; leur rôle est d'assurer une visibilité permanente entre une station au sol ou un satellite plus bas

et plusieurs satellites au même instant ; les liens sont de nature micro-onde. Ainsi, la constellation GPS (24 satellites actuellement) permet d'établir un repère de référence au sol d'un grand nombre d'observatoires bien répartis à la surface du globe. En outre, la technique GPS permet également de contribuer à la trajectographie de satellites bas (entre 250 et 1350 km), porteurs d'une antenne et d'un récepteur en s'affranchissant des effets de l'atmosphère.

Enfin, les satellites altimétriques permettent de mesurer le niveau de la mer par radar (et micro-onde) ; ils doivent donc être localisés en permanence à une précision si possible meilleure que celle de la mesure satellite-surface de la mer assurée par le radar. L'estimation de trajectoire devient donc un point crucial. Elle est assurée par au moins deux des techniques de poursuite de satellite, à savoir les techniques laser et DORIS. Cette dernière, basée sur une technique Doppler montante, a été mise au point par le CNES et l'IGN à la fin des années 80. Plusieurs satellites altimétriques ont aussi une antenne GNSS à bord (TOPEX/Poseidon, le premier en 1992, puis les satellites Jason).

Comme on le constate, le calcul de trajectoire est donc à la base de grands produits scientifiques de la géodésie spatiale : la topographie des océans, le champ de gravité global à basse résolution spatiale, le repère de référence terrestre via le positionnement géocentrique des stations, etc. ; la rotation de la Terre et le mouvement du pôle également bien que la technique VLBI soit prépondérante dans ce domaine. La mise en oeuvre de ces modèles, par assimilation de mesures de poursuite, conduit nécessairement à la modélisation des effets dynamiques agissant sur les satellites pour calculer leur trajectoire. Ceci génère inévitablement des incertitudes qui vont se propager et dont il est important de comprendre les conséquences pour permettre en retour de progresser.

Parmi ces modèles globaux, la Terre dans son ensemble, le repère de référence terrestre international constitué par l'ensemble des stations au sol est une donnée fondamentale pour les Sciences de la Terre. Il est disponible sous la forme d'une position à une date de référence et d'une vitesse dans le système géocentrique 3 axes, pour chaque point du réseau. Les études des déformations continentales de la croûte, des variations de la surface moyenne des océans, des forçages océan-atmosphère-continent reposent sur la qualité du repère, c'est-à-dire sa stabilité dans le temps, sa disponibilité et son exactitude. Les techniques de mesure, en station et/ou embarquées, étant profondément différentes par nature (longueurs d'onde, principes, satellites, etc.), chaque technique apporte sa propre réalisation du repère terrestre international. Il faut nécessairement inter connecter les techniques au sol afin d'obtenir un repère aussi large que possible à l'échelle de la Terre, ce qui permet aussi d'identifier les systématismes venant de chaque technique ; c'est le rôle des rattachements mesurés au sol entre les divers instruments d'un même observatoire : antennes DORIS, GNSS, VLBI, et télescopes laser.

1.2 Objectif des travaux de recherche

1.2.1 Grandes lignes

L'amélioration des techniques spatiales utilisées pour le positionnement, la navigation ou l'orbitographie des satellites d'observation ou de surveillance de la Terre, passe par des développements technologiques et des comparaisons sur le plan métrologique. Elle passe également par l'amélioration des modèles et le développement de nouveaux secteurs. Nous nous intéressons ici à l'impact combiné des erreurs de modèles, dynamiques et géométriques, sur les produits géodésiques : tout d'abord l'orbitographie puis quelques secteurs d'applications comme les repères des stations au sol.

L'objectif de mes travaux de recherche est l'étude et le développement de méthodes de transfert d'erreurs depuis les modèles utilisés pour décrire les équations de mouvement (potentiels et forces non conservatives), vers l'estimation de coordonnées de points au sol. L'idée est de mettre en oeuvre ces mécanismes de transfert, essentiellement à travers les équations de la dynamique puis à travers les équations de mesure sol-satellite, afin d'établir des relations de causes à effets. Ces relations devront être explicites et littérales, donc applicables à tous les types de trajectoire, entre : en amont les erreurs de modèle dynamique, puis les erreurs d'orbite générées, leurs impacts sur les observables sol-satellite, et finalement en aval les erreurs induites sur le positionnement.

Il faut donc définir ce que nous appellerons erreurs "amont" (niveaux qualitatif et quantitatif), caractériser les relations nécessaires aux développements des équations de transferts d'erreurs simples ou complexes, et finalement se donner des cibles "aval", comme : la trajectoire, le repère de référence ou la surface topographique de la mer. Dans le contexte de la géodésie spatiale, où le calcul de trajectoire reste une base essentielle à toutes les investigations scientifiques liées à l'observation de la Terre depuis l'espace, l'analyse des impacts des incertitudes des modèles courants sur l'orbite paraît incontournable ; elle constitue une première et grande part de ce travail.

1.2.2 Etapes

Les étapes que nous avons définies dans la progression de notre travail sont les suivantes. Tout d'abord (Chapitre 2), nous faisons une synthèse des incertitudes relevées en géodésie spatiale par plusieurs travaux d'analyse récents (de 2009 à 2015). Ceux-ci sont principalement liés à l'analyse d'erreurs d'orbite, sa qualité spatio-temporelle, et leurs conséquences : soit au niveau du repère de référence par les coordonnées des stations au sol, soit au niveau de la surface topographie des océans par altimétrie. L'origine de ces erreurs est très souvent liée au modèle de champ de gravité de la Terre utilisé dans l'estimation de trajectoire, y compris ses variations temporelles, séculaires et périodiques. L'origine des erreurs relève également d'effets dissipatifs qui agissent sur l'orbite (forces non gravitationnelles) dont l'incertitude reste préoccupante malgré les méthodes numériques qui sont utilisées pour les "absorber". En outre, sont rappelés également quelques travaux sur l'origine

géométrique des erreurs d'orbite, provenant donc essentiellement du segment sol : la qualité et la répartition des coordonnées des stations au sol, et les qualité et quantité ou couverture de la trajectoire par les mesures de poursuite.

Le Chapitre 3 est dédié à la méthodologie. Etant à la base un travail essentiellement analytique, nous nous attachons à un rappel sur les équations et les paramétrages utilisés en dynamique analytique. Afin de décrire les mouvements quasi-circulaires – c'est le cas de presque toutes les missions d'observation de la Terre et des GNSS, nous développons les équations du mouvement du satellite en coordonnées sphériques, et nous donnons le principe de l'intégration analytique de ces équations. Ces travaux ont débuté par Bois (1992), puis ont été repris par Exertier and Bonnefond (1997) en une application sur l'estimation des erreurs géographiquement corrélées (cas de TOPEX/Poseidon). Nous développons ici une seconde version de la théorie, beaucoup plus stable aux degrés > 30 , grâce à l'utilisation de fonctions d'inclinaison calculées par récurrence (cf. travaux de Lion (2013)). Dans une seconde partie de ce chapitre, nous exprimons les mécanismes utilisés pour calculer explicitement le transfert des erreurs d'orbite sur les fonctions de mesures sol-satellite. Enfin, de manière brève, nous reprenons la théorie de Kaula, en éléments képlériens classiques. Plusieurs missions ont en effet une excentricité d'orbite $e > 0.005$ ce qui n'est plus en adéquation avec les hypothèses de circularité faites en utilisant les coordonnées sphériques.

Le Chapitre 4 est dédié aux analyses que nous avons menées. A partir de plusieurs types de trajectoire, de plusieurs sources d'erreurs, d'origine dynamique et/ou géométrique, nous montrons les conséquences du transfert de ces erreurs, certes théoriques, soit en terme d'extension géographique sur le géoïde, soit sur les coordonnées des stations au sol engagées dans la poursuite de satellites. Nous discutons aussi des extensions possibles de la méthode envisagée, mais également de ses limites intrinsèques.

Enfin en Annexe, nous disposons les calculs complexes et longs, et décrivons les outils d'estimation qui ont été développés, les stratégies et options, et les calculs numériques menés pour les contrôles.

1.2.3 Apport personnel

Les différents travaux sur lesquels j'ai apporté ma contribution sont liés tout d'abord à l'analyse des situations récentes rencontrées en géodésie spatiale : en calcul d'orbite, en altimétrie satellitaire, en détermination du champ de gravité et dans l'estimation des repères au sol. J'ai fait un travail de bibliographie et de synthèse afin d'obtenir la base de l'argumentation de ce travail, phénomènes et chiffres en quantité et qualité, qui caractérisent les limites atteintes aujourd'hui par les modèles et les mesures.

J'ai également pris en charge les développements analytiques. Il s'agit de la manipulation des équations du mouvement orbital en coordonnées sphériques, en repères fixe et tournant. J'ai

utilisé un développement au degré un, avec une prise en compte de fonctions d'inclinaison, et des relations de récurrence, qui permettent l'écriture des potentiels après rotations à des degrés élevés ($l, m > 300$). J'ai finalement obtenu l'écriture des solutions analytiques. J'ai largement participé à leurs programmations et contrôles. J'ai également repris les développements des fonctions de mesure, les observables théoriques que sont la distance et la vitesse radiale sol-satellite, et leurs dérivées partielles par rapport aux paramètres orbitaux. La méthode envisagée ici n'applique pas de principe de projection analytique des perturbations, d'un jeu de paramètres à un autre, comme dans les travaux anciens de [Rosborough and Tapley \(1987\)](#) par exemple. A partir des solutions analytiques écrites en coordonnées sphériques, les projections se calculent ensuite numériquement.

Enfin, j'ai pris en charge toutes les analyses menées, dont les plus intéressantes sont présentées dans le Chapitre 4. L'utilisation des codes numériques, développés en amont dans le cadre de ma thèse, suppose la mise au point de toutes les quantités. Cela implique aussi les vérifications par rapport aux résultats courants des analystes (de l'ILRS et de l'IDS par exemple), avec parfois des hypothèses revues ou des erreurs corrigées.

Chapitre 2

Situation actuelle, état de l'art

Sommaire

2.1	Historique récent des modèles de champ de gravité	7
2.1.1	Effets géophysiques globaux	7
2.1.2	Principaux modèles publiés depuis 2000	8
2.1.3	Orbitographie	10
2.2	Travaux d'analyse sur les incertitudes de modèle	12
2.2.1	Incertitudes dans la dynamique	12
2.2.2	Incertitudes dans la "géométrie"	17
2.3	Futur : objectifs GGOS	20
2.4	Conclusion et orientation de nos travaux	21

2.1 Historique récent des modèles de champ de gravité

2.1.1 Effets géophysiques globaux

La seule influence du Soleil est primordiale sur le système Terre pris dans sa globalité, c'est-à-dire sur les trois composantes majeures : Terre solide, hydrosphère et atmosphère et leurs interactions. Les calottes glaciaires, les glaciers, les réserves d'eaux souterraines, ..., ainsi que les masses atmosphériques se répartissant différemment au cours d'une année, les processus engendrent des effets saisonniers, inter-annuels, etc. Bien qu'il existe très certainement un grand nombre de processus géophysiques liés à la redistribution globale des masses, nous pouvons classer les phénomènes, schématiquement, en trois catégories :

1. les marées océaniques, terrestres (ou solides) et atmosphériques,

2. les redistributions de masses d'origine météorologique, géophysique et océanique (les masses d'air, les eaux continentales, l'accumulation de neige et de glace, les tremblements de terre, les courants océaniques, etc.). Il y a cependant de très grandes différences entre les périodes associées à ces phénomènes,
3. le rebond post-glaciaire, en tant que variations de la Terre solide, et les phénomènes associés à la dernière déglaciation.

TABLE 2.1 – Missions spatiales récentes pour la gravimétrie.

Missions	Objectifs / Commentaires	Références
CHAMP (2000)	Courtes long. d'onde du champ	Reigber et al. (2003)
GRACE (2002)	Grandes et moyennes long. d'ondes Géoides mensuels Modes de variabilités temporelles Covariances spatiales & temporelles	Reigber et al. (2005) EOF
GOCE (2009)	Dérivées secondes du champ Géoïde courte long. d'onde Anomalies de gravité (htes fréq. champ fixe) Circulation océanique	Pail et al. (2011)

Un des enjeux actuels est de construire la meilleure image possible du champ de gravité de la Terre et de ses variations temporelles. Avec les missions spatiales (voir Table 2.1) et les données au sol ou par avion, il faut trouver un compromis entre résolution spatiale et résolution temporelle. En plus, il faut aussi des séries temporelles longues de manière à mieux séparer les effets à long terme et les effets inter-annuels. La mission GRACE (2002), par exemple, a fourni depuis plus de 12 ans une information unique sur les variations temporelles de gravité à grande échelle associées à des redistributions de masse au voisinage ou à l'intérieur de la Terre.

2.1.2 Principaux modèles publiés depuis 2000

Dans les modèles récents, chaque coefficient du champ est décomposé, principalement, en un terme séculaire et deux termes périodiques : annuel et semi-annuel. Dans ce contexte, la dérive séculaire des coefficients des harmoniques zonales de bas degré caractérise avant tout le phénomène de rebond post-glaciaire et les phénomènes associés (type 3), dont les temps caractéristiques sont d'un ordre supérieur au millier d'années. En revanche, les deux termes périodiques de ces coefficients sont associés aux effets des redistributions de masses d'origines météorologique et géophysique (type 2).

Dans cette section, nous rappelons les principaux modèles de champ (Table 2.2), calculés au départ avec des données de poursuite de satellites et des données sol (dont d'altimétrie) ; les modèles GRIM5-S1 et EGM96 pouvant être considérés comme équivalents. Ensuite, à partir du lancement

de la mission CHAMP en 2000, des données de gravimétrie spatiale ont apportées une contribution très importante aux courtes longueurs d'onde (en-dessous de 1000 km), débutant ainsi la série des modèles EIGEN.

TABLE 2.2 – Modèles ($GM = 398600. \text{ km}^3.s^{-2}$)

	Commentaires	Références
GM	.4415 (IERS) / .441644 (SLR) Echelle à ± 0.3 ppb	Collilieux et al. (2007)
Modèles de champ (*)		
JGM3		Tapley et al. (1996) EGS, 2002
TEG-4	Les modèles suivants sont équivalents	
EGM96	vis-à-vis de EnviSat	
GRIM5-S1	id.	
GRIM2-EGM96	Est un peu meilleur	1997-99, ITRF97
GRIM5-S1-EGM96	Impact sur le géoïde : $\sigma = 4.26$ m $\sigma = 1.28$ m	
EIGEN -1 & -2	Données CHAMP seules	
EGM-2008	Degré et ordre > 2159 ; compatible WGS84	Pavlis et al. (2012)
EIGEN-GL04S	Pour les missions d'altimétrie :	
EIGEN-GRGS.RL02bis	LAGEOS, GRACE (GDR-C)	Förste et al. (2006)
id RL03bis	mean field /GDR-D (Jason)	
AIUB-GRACE03S	mean field /GDR-E	
EIGEN-5C	GRACE	
EIGEN-6S	nouvelle version GL04C au degré 360	Förste et al. (2008)
	LAGEOS, GRACE, GOCE	Förste et al. (2012)
Marées océaniques		
FES-95, -99, -2002	équivalents	
CRS-3.0 vs. FES-2004	\neq RMS orbite sur LAGEOS, Starlette	IERS-2010

(*) Site web pour les modèles : <http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/>

Au fil des progrès des techniques spatiales SLR, DORIS, GNSS et de la nouvelle ère des missions CHAMP, GRACE et GOCE (2009) de nouvelles générations de modèles de champ de gravité sont apparues. Rappelons que l'altitude de lancement CHAMP est à 454 km, GRACE à 495 km (avec un lien satellite-satellite de 220 km) et GOCE à 290 puis 270 km et moins. La sensibilité de la mesure a donc été améliorée sans cesse notamment par les mesures de différentiation (gradient de gravité). A partir des modèles basés sur les données de CHAMP [Reigber et al. \(2003\)](#), et aussi sur les perturbations de satellites, plusieurs séries uniques ou combinées ont été constamment améliorées : voir [Tapley et al. \(2005\)](#); [Reigber et al. \(2005, 2006\)](#); [Pail et al. \(2010\)](#). Les modèles S sont obtenus par mesures de satellites, les modèles C utilisent aussi des mesures sol (altimétrie et gravimétrie). Les solutions utilisent des équations normales de LAGEOS au degré 30, celles de GRACE au degré 130 et enfin GOCE des degrés 50 à 130 puis jusqu'à 250 (S. Bruinsma, séminaire Géoazur, décembre 2013).

Avec GRACE, de nouveaux types de modèle de champ gravité apparaissent sous la forme de

solutions mensuelles voire décadaires (avec GRACE/CHAMP, SLR, etc.). Ils sont adoptés pour être utilisés dans de nombreuses applications en géophysique, océanographie et géodésie. Il existe des séries temporelles $U(t)$ mensuelles dépendant des mesures GRACE mais pas seulement ; il y a aussi des séries à 10 jours (GRGSRL02), voire aussi journalières (TUGRAZ). Les modèles moyens sont établis à partir des séries temporelles, pour l'altimétrie et pour le calcul de l'ITRF.

Commentaires

Selon J.M. Lemoine¹, il est très complexe de trouver une formulation analytique unique pour établir les coefficients d'un modèle à même de représenter les variations temporelles complexes du champ de gravité ; il existe aussi des effets inter-annuels et des sauts (i.e., séismes). Les effets atmosphériques (ECMWF / IB) et hydrologiques (GLDAS) sont mal modélisés actuellement (effets annuels à ± 1 cm). L'ensemble est donc difficile à représenter par des constantes et des pentes par coefficient.

Les termes périodiques annuels et semi-annuels, ou les séries temporelles, permettent de mieux représenter les phénomènes, sans qu'il s'agisse de variations rapides. En revanche, les coefficients périodiques ou les séries ne sont pas forcément disponibles pour toutes les missions d'altimétrie ou de positionnement, dans le passé comme dans l'avenir.

Comme on le constate, les différents modèles et coefficients publiés récemment ne sont pas tous cohérents entre eux et aussi par rapport aux effets géophysiques qu'il faut modéliser. Que peut-on dire de leurs conséquences directes sur l'orbitographie, sur les erreurs géographiquement corrélées et, finalement, sur les repères de référence ?

En particulier, les coefficients d'ordre un (liés à l'origine du repère de décomposition, appelé dans la suite géocentre) caractérisent des grands transports hydrologiques Nord-Sud (donc de période plutôt annuelle mais pas seulement). D'amplitude de quelques mm, ils jouent aussi un rôle important.

2.1.3 Orbitographie

La dynamique orbitale des satellites permet de quantifier, à l'échelle globale, les grandes modifications dans la forme de la Terre et la répartition des masses (bas degrés du champ de gravité) ; c'est le cas pour les modèles avant les missions gravimétriques. Inversement, l'estimation des trajectoires des satellites est soumise aux limites des modèles géodynamiques utilisés. En jeu, est la qualité de l'orbite que fourniront ces modèles pour des applications en sciences de la Terre. Ce dernier aspect est fondamental dans le cadre du présent travail.

Il est important de se fixer un certain nombre d'altitudes de missions spatiales, par exemples : *i)* pour la navigation les GNSS à 20,000 km d'altitude, *ii)* pour le repère de référence terrestre par

1. Site web de *Séminaire Géodésie Millimétrique* :

<http://grgs.obs-mip.fr/en/formation/ateliers/Seminaire-Geodesie-Millimetrique>

laser les satellites LAGEOS à 6,000 km d'altitude, *iii*) pour l'altimétrie satellitaire les satellites type Jason, Saral, Cryosat, HY2-A entre 1335 et 780 km, et enfin *iv*) pour le repère de référence terrestre DORIS les satellites entre 1335 et 780 km (comme Jason, SPOT, etc.).

La redistribution temporelle des masses à l'intérieur et à la surface du globe engendrent des effets faibles sur l'évolution d'orbite ; ils sont séculaires et à longues périodes — de plusieurs dizaines à centaines de jours. Ils ont été détectés sur des périodes d'analyse d'orbites menées sur plusieurs années. Des redistributions de masses rapides, à hautes fréquences (par exemple, l'atmosphère), ne sont pas toujours prises en compte dans l'orbitographie en dehors des quelques termes (P. Bonfond, séminaire laboratoire Geoazur, décembre 2013). Suivant les longueurs d'onde, l'hydrologie mesurée par GRACE a un réel impact sur l'orbite donc sur le niveau de la mer via l'altimétrie. L'étude de la variabilité régionale est impactée lorsque les coefficients périodiques de gravité sont pris en compte seulement à bas degré.

Note concernant la restitution d'orbite précise.

- d'une part, lors de l'ajustement de la trajectoire sur les mesures de poursuite utilisées, les paramètres ajustés et notamment les conditions initiales du mouvement, absorbent une partie des erreurs des modèles dynamiques,
- d'autre part, l'ajustement de forces dites empiriques, aux périodes orbitale et journalière, provoque une certaine absorption des erreurs de la dynamique (on parle alors de coefficients “poubelles”).

A posteriori, nombre d'analystes font en fait une analyse de ces phénomènes d'absorption. Ceci en observant les séries ajustées de conditions initiales successives sur le long terme, ou encore les séries des coefficients de forces empiriques. Leur but est de comprendre les signaux observés afin de revenir vers le modèle et de l'améliorer.

- enfin, les méthodes dites “reduced-dynamics” développées initialement par le JPL grâce au suivi GPS 3D permanent de la trajectoire (cas des satellites altimétriques et gravimétriques), ont réellement permis de s'affranchir des erreurs de modèles. Mais d'autres problèmes, géométriques liés au centrage Nord-Sud des orbites voire aux erreurs d'orbite des satellites GPS, sont apparus.

Commentaires

La Table 2.3 indique quelques résultats d'orbitographie, obtenus avec différents modèles de champ de gravité et repères de référence, depuis quelques années. Nous voulons montrer à la fois la progression et l'amélioration des calculs ainsi que les limites atteintes récemment dans quelques cas.

Pour les satellites géodésiques (ex. : Starlette, Stella à 800 km), l'amélioration est très importante due aux meilleurs modèles de champ ; elle l'est beaucoup moins pour LAGEOS (à 6000 km), même si les meilleurs calculs d'orbite sont à 8-9 mm aujourd'hui, voire moins en utilisant un noyau de stations (“core”). Si l'on regarde les résultats obtenus à partir du modèle JGM-3 (publié en 1996, de même classe que EGM-96), en terme de résidus d'orbite, on constate que l'amélioration

TABLE 2.3 – Résidus de calculs d'orbites selon différents auteurs, dont Bruisma, Bonnefond, Lemoine, selon différents modèles ou solutions de repère.

Satellite					Unité	Références
Modèles de champ >	EGM-96	GRIM5-S2	CH-0			
LAGEOS	18.				mm	
Stella	110.	60.	45.		mm	
Starlette	50.	75.	55.		mm	
GFZ	400.	45.	20.		mm	
suite >	EGM DIR-3/4	EIGEN-GL04C	GDR-D (dyn.)	GDR-E (reduced dyn.)		
LAGEOS (arcs 15 j)	11-12				mm	
Starlette (ars 6 j)	18-22				mm	
Jason-1		15.5			mm	Ries et al. (2006)
		0.35			mm/sec	id.
GRACE		16.8			mm	Lemoine (2015)
Saral		13.0	18.	17.	mm	OSTST ^a
Jason-2		10.1	12.-13.	10.	mm	id.
Repère >	ITRF2000	ITRF2005	ITRF2008			
LAGEOS-1 /-2 (rms 3D)	13.	12.5	11.		mm	ILRS, 2010
"Core stations"			7.2		mm	Sośnica et al. (2012)

a. Site web OSTST :

<http://www.aviso.altimetry.fr/en/user-corner/science-teams/ostst-swt-science-team.html>

est importante pour tous les satellites ; elle est spectaculaire entre TOPEX/Poseidon (35-38 mm, en 1996) et Jason-2 (10-12 mm) donc pour la même trajectoire.

Actuellement, les données laser servent essentiellement pour le contrôle (qualité et stabilité) des orbites des satellites altimétriques (Jason-2, Saral, Cryosat). Pour la composante radiale, ce sont les mesures à haute élévation qui sont utilisées ; le niveau atteint est de 8-9 mm pour les 3 satellites.

2.2 Travaux d'analyse sur les incertitudes de modèle

2.2.1 Incertitudes dans la dynamique

Si l'on considère un modèle de dynamique orbitale, on peut distinguer une partie centrale, le modèle de potentiel gravitationnel avec une partie constante et une partie qui dépend du temps (variations des coefficients du champ central plus les marées), et une partie non conservative qui comporte les modèles de forces comme le freinage et les pressions de radiation (solaire, albédo et infra-rouge).

Champ et variations temporelles

Nous considérons dans la suite du document deux sources d'erreurs, l'une fixe l'autre variable : *i)* l'inexactitude d'un modèle (celle de ses coefficients) et son imprécision, *ii)* les variations temporelles non prises en compte dans l'orbitographie. Comme dans beaucoup de travaux publiés sur les précisions d'orbite, les inexactitudes sont représentées par des différences entre modèles à la même date, et les imprécisions sont données par les matrices de variance-covariance des modèles éventuellement étalonnées. Plusieurs modèles sont discutés ci-dessous, dont on trouve la liste dans la Table 2.2.

La performance d'un modèle de champ gravité en détermination d'orbite précise (POD-Precise Orbit Determination) est bien entendu un des critères cruciaux. Inversement, l'analyse de la détermination d'orbite dynamique aide à comprendre la sensibilité aux termes du modèle de champ, notamment pour des orbites d'altitude basse, et aussi les conséquences de ceux-ci sur les produits de la géodésie.

En appliquant des modèles de champ statiques développés avec des données GRACE (GGM02C, EGM2008 et EIGEN-GL04S1) par rapport au modèle JGM3 pour l'analyse d'erreur d'orbite TOPEX/Poseidon (T/P), Jason-1 et Jason-2, [Lemoine et al. \(2010\)](#) ont indiqué une réduction de 11 mm de l'erreur entre JGM3 (1994) et EIGEN-GL04S1 (2006).

Pour comprendre la sensibilité de l'orbite LAGEOS (sur une solution d'une semaine, au degré 30), [Sośnica et al. \(2012\)](#) ont étudié l'impact des modèles de champ gravité suivants : *i)* basés uniquement sur des orbites de satellites (laser, etc.) et des données sol (JGM3, EGM96), *ii)* des données de GRACE (AIUB-CHAMP03S) ou bien *iii)* des données multi-techniques (EGM2008, EIGEN-GL04C, EIGEN-51C, etc.). Ils ont révélé que les modèles basés sur GRACE sont meilleurs avec un RMS des résidus de mesures d'environ 7.2 mm. Alors les autres solutions ont un RMS de 11-12 mm.

[Couhert et al. \(2015\)](#) ont évalué l'erreur d'orbite dépendant de la technique de poursuite (GPS, DORIS, SLR). Ils estiment la stabilité à long terme obtenue par les différentes techniques sur Jason-1 et Jason-2. D'un autre côté, ils montrent l'impact (sub-mm/an) des coefficients C/S_{31} sur la dérive d'orbite radiale régionale en comparant la solution d'orbite Jason-2 GDR-D à l'orbite GPS-dynamique réduite. Les erreurs radiales d'orbite sont prépondérantes aux degrés 2 et 3 pour les harmoniques sectoriels. La situation est plus difficile sur Cryosat-2 avec des problèmes aux ordres résonnants (14-15 et multiples) à cause de leurs périodes > 10 jours.

Il faudrait aussi diminuer l'erreur d'orbite, en prenant mieux en compte les variations rapides de champ, à partir de l'hydrologie et des marées. Enfin, parmi les modèles de nouvelle génération, comme les solutions mensuelles du champ, il existe une dispersion des solutions entre les différents centres d'analyse (J.M. Lemoine, GRGS Toulouse).

En ce qui concerne les modèles de champ variable (TVG-Time Variable Gravity), [Zelensky et al.](#)

(2010); Lemoine et al. (2010) ont montré un signal annuel géographique cohérent de TVG 20 x 20 (GRACE) sur la composante radiale de l'orbite Jason-1 avec une amplitude de $\pm 4-5$ mm. Sośnica et al. (2012) ont noté que le coefficient C_{20} constant ou linéaire est insuffisant. La petite variation de C_{20} peut induire une dégradation grave de la détermination d'orbite précise LAGEOS. Sur une période de temps de plusieurs années, il faut donc trouver un moyen pour décrire les variations complexes observées sur les coefficients HS du champ ; soit sous la forme de séries temporelles, soit sous la forme de termes (constant, séculaire, et multi-périodique) appliqués pour chaque coefficients. Mais ceci peut être très lourd.

Des recherches récentes des centres d'analyses CNES/GRGS, GFZ (Allemagne) et JPL -NASA apportent plusieurs résultats importants. Rudenko et al. (2014) ont utilisé des modèles développés entre le GFZ et CNES/GRGS ; deux modèles stationnaires (EIGEN-GL04S et EIGEN-6S-stat) et quatre dépendant du temps (EIGEN-6S-correct, EIGEN-6S2, EIGEN-6S2A et EIGEN-6S2B). L'idée est de regarder leur influence sur la précision d'orbite des satellites altimétriques : ERS-1, ERS-2, TOPEX/Poseidon, et Envisat pendant plus de 20 ans, de 1991 à 2011. Les analyses ont permis de spécifier l'impact des termes dérivées (degrés 2-50) et montrent le bénéfice énorme des modèles variables pour les solutions d'orbite depuis la période post-GRACE, 2003. En outre, Bertiger et al. (2013) ont trouvé les différences d'orbite des modèles de champ variables GDR-D et JPL RLSE13a, basé sur la version RLSE11a et JPLRL05Mtg : de 6 mm RMS ou 2-3 mm RMS "en moyenne sur des grilles 6°x 6°".

Lemoine et al. (2014) ont introduit une nouvelle solution du champ moyen nommé EIGEN-GRGS.RL03.Mean-Field (GDR-E)² pour le calcul d'orbite des satellites altimétriques ; celle-ci est basée sur des données pendant 10 ans de GRACE et 30 ans de LAGEOS. Elle inclut des variations périodiques moyennes annuelles, semi-annuelles, ainsi que des termes représentant un tremblement de Sumatra. Bertiger et al. (2014) en regard de la solution JPLrlse14a (JPL Release 2104), ont reconfirmé qu'elle est d'accord avec GDR-E au niveau de 4.4 mm et de 6.3 mm avec GDR-D.

Degré un du champ : géocentre. La modification des coefficients harmoniques sphériques (C_{10} , C_{11} , S_{11}) du potentiel de gravité est due à la définition de l'origine du repère de décomposition du champ.

Gourine (2012) a utilisé des mesures laser des satellites LAGEOS-1&2 et Starlette pour la détermination et l'analyse des séries temporelles des coordonnées des stations et des paramètres d'orientation de la Terre - EOP (Earth Orientation Parameters). Il a confirmé que les variations du géocentre sont principalement dues à la redistribution des masses fluides en surface. Elles présentent deux termes principaux : annuel et semi-annuel. Il a montré que les variations des composantes du géocentre pour des solutions combinées sont de l'ordre de 4-5 mm.

2. <http://grgs.obs-mip.fr/grace/variable-models-grace-lageos/grace-solutions-release-03>

Soñica et al. (2012) ont similairement mis en évidence l'impact des coefficients de degré un du modèle ITG - GRACE2010S. Ils indiquent un décalage constant d'environ 14 mm sur l'orbite de LAGEOS. Mais les Conventions IERS 2003 ont recommandé qu'il ne faut pas utiliser les coefficients de champ gravité de degré un.

D'un autre côté, Rudenko et al. (2014) ont étudié l'effet des termes de dérive des degrés 3-50 du modèle de champ. Ils montrent aussi des déviations du géocentre notamment sur l'axe Y. La source de ces déviations, à cause du transfert complexe des termes du champ négligés vers l'erreur d'orbite, semble provenir des termes de dérive des degrés inférieurs. L'analyse croisée multi-missions des solutions d'orbite a montré que la compensation d'origine au début de la mission ERS-1 (1991) augmente jusqu'à 2 cm.

L'effet du mouvement de géocentre sur l'orbite Jason-2 a été étudié par Melachroinos et al. (2013); Bertiger et al. (2014). Ils ont montré qu'une amplitude de $\pm 4-5$ mm de l'erreur de la composante Z crée une erreur systématique Nord-Sud (centrage) sur l'orbite. Cet effet est repris par Couhert & Mercier (OSTST, 2014 et 2015; voir le site <http://meetings.aviso.altimetry.fr/>) qui s'interroge sur la validité des séries du géocentre, notamment en Z; les composantes X,Y sont plus cohérentes entre GPS, DORIS et le laser.

Degré deux du champ : aplatissement dynamique et pôle. La modification des coefficients harmoniques sphériques du potentiel de champ gravité (C_{20} et C_{21}/S_{21}) est due à la variation de l'aplatissement dynamique (Terre solide, et autres composantes globales) et la définition de l'axe du pôle, respectivement.

A partir des années 90, plusieurs auteurs ont noté que le transfert d'erreur des paramètres d'orientation de la Terre (EOP) vers la composante radiale de l'orbite (TOPEX/Poseidon et ERS-1) reste largement inférieur à 1 cm (ex : Bonnefond et al. (1995)). En outre, des études sur les orbites Starlette et LAGEOS-1 & -2, par Gourine (2012), ont aussi calculé des séries temporelles de paramètres du pôle avec une erreur de $\pm 4-6$ mm sur (x_p, y_p) , ce qui est en accord avec les Conventions IERS-2010³.

D'un autre côté, l'aplatissement dynamique est déterminé par le laser et en particulier LAGEOS. On le constate dans l'utilisation presque systématique des matrices normales de coefficients de bas degrés venant des satellites laser pour déterminer les modèles de champ modernes de type EIGEN.

Marées océaniques

Les effets de marées océaniques sont incorporés comme des variations périodiques des coefficients C_{nm}, S_{nm} du potentiel de la Terre, sous la forme : $\Delta^{\text{onde}} C/S_{nm}(t)$ pour chaque onde

3. <http://www.iers.org/IERS/EN/Publications/TechnicalNotes/tn36.html>

(O_1, M_2, \dots) considérée. D'après les Conventions IERS-2010, les différences RMS d'orbite des satellites Starlette et LAGEOS-1, en comparant les modèles CSR3.0 et FES2004 sur 6 et 7 jours, sont de 9 et 7 mm respectivement.

En surveillant l'impact des variations de masses océaniques et atmosphériques dans l'analyse des données GRACE, [Zenner et al. \(2010\)](#) ont montré que les solutions des champs GRACE sont améliorées vers une erreur de hauteur de géoïde de l'ordre du millimètre.

En comparant des modèles de marées différents dans l'analyse des données altimétriques [Savcenko and Bosch \(2012\)](#) ont identifié une valeur de 1-2 cm de l'amplitude des signaux de marées.

Pression de radiation solaire

Plusieurs forces sont dites non conservatives, le freinage est dissipatif; l'incertitude n'est pas négligeable en analyse des erreurs d'orbite. En ce qui concerne la Pression de Radiation Solaire Directe - *PRSD*, les problèmes interviennent notamment aux passages des satellites dans l'ombre de la Terre (éclipses). Ceci concerne les satellites GNSS (angle de lacet des engins), mais aussi Jason-2 pour lequel l'attitude est compliquée à prendre en compte. Dans ce type d'effets, c'est à la période orbitale qu'il faut agir (erreur de $< 0.1 m^2$ et erreur d'orbite résiduelle > 5 mm); au-delà de cette période, tout est bien filtré par le jeu de l'ajustement de forces empiriques (F. Mercier, Séminaire du GRGS, Sorèze, 2015).

Depuis le début de l'ère spatiale avec les satellites artificiels envoyés dans le système Solaire, [Musen \(1960\)](#); [Parkinson et al. \(1960\)](#) ont commencé à étudier l'influence de *PRSD* sur les trajectoires. *PRSD* est bien sur significatif pour l'orbite d'altitude haute; c'est une exigence fondamentale pour la détermination d'orbite précise des satellites GPS. Les résidus RMS des orbites (sur les composantes radiale, transverse et normale) atteint le niveau du décimètre ([Beutler et al. \(1994\)](#); [Kuang et al. \(1996\)](#)). Puis [Springer et al. \(1999\)](#) ont construit un modèle basé sur des expériences et résultats de CODE (Center of Orbit Determination in Europe) pour obtenir 6 cm de résidu RMS d'orbite. Le modèle de [Bar-Sever and Kuang \(2003\)](#) a montré une amélioration de la performance de 80% pour les satellites du Block IIR et de 24% pour les satellites du Block IIA. De nos jours, les modèles *PRSD* de [Rodriguez-Solano et al. \(2014\)](#) par rapport au modèle CODE a une réduction moyenne de 46%, 38% et 57% pour les composantes radiale, transverse et normale de l'orbite GPS, respectivement. Pour l'orbite GALILEO, un modèle nommé "boîte cubique simplifiée", est basé sur le modèle CODE plus un modèle de boîte a priori. [Montenbruck et al. \(2015\)](#) a réduit l'amplitude de l'erreur radiale de 20 cm à 5 cm. En outre, il y a plusieurs modèles *PRSD* de [Vokrouhlicky et al. \(1993\)](#) pour LAGEOS ou de [Ziebart and Dare \(2001\)](#) pour l'orbite GLONASS qui ont été déjà construits.

Pour l'effet de *PRSD* sur la composante Z du géocentre, [Gobinddass et al. \(2009\)](#) a proposé la série temporelle IGN ignwd07 pour diminuer le RMS de 41.4 mm à 29.9 mm. Cela réduit la

série temporelle de composante Z du géocentre de DORIS de 25.7 mm à 5 mm. Alors que le modèle box-wing ajustable de [Rodriguez-Solano et al. \(2012\)](#) a fait une réduction moyenne de 92% pour tous les harmoniques draconitiques de la composante Z de géocentre. [Rodriguez-Solano et al. \(2014\)](#) ont aussi montré une réduction 24% et 50% pour l'erreur des coordonnées x et y du pôle, respectivement. Bien qu'il existe plusieurs modèles de *PRSD* développés, la connaissance entière de son comportement et les conséquences sur l'erreur d'orbite et le repère de référence est encore un défi.

2.2.2 Incertitudes dans la “géométrie”

Le repère de référence.

Au fil des évolutions de l'ITRF, la réalisation courante est l'ITRF2008 (et bientôt 2014) ; le repère combine les données des quatre techniques SLR, VLBI, GNSS et DORIS. La sensibilité du positionnement des stations de poursuite par rapport aux orbites et aux mesures est toujours d'intérêt dans la communauté de géodésie spatiale. Selon Z. Altamimi (Séminaire du GRGS, Sorèze, 2015), la solution du repère de référence terrestre doit s'améliorer notamment par la réduction des erreurs de modélisation orbitale. Afin d'aboutir à un repère plus exact, il faut séparer les mouvements géophysiques des erreurs propres à chaque technique.

Les techniques de géodésie spatiale et leur réseau associé sont très différents, à la fois au sol (stations : 30 laser, 60 DORIS et > 200 GNSS) et dans l'espace par le nombre de cibles effectivement disponibles et utilisées. [Altamimi et al. \(2011\)](#) ont présenté des performances fortes de l'ITRF2008 par rapport au passé, pour la précision de positionnement des stations ainsi que des paramètres d'orientation de la Terre (EOP). Un très bon accord pour la solution SLR, en terme d'origine, au niveau de 10 mm ou mieux, et en terme d'échelle pour la solution combinée SLR et VLBI au niveau de 7 mm. De nombreuses stations ont des erreurs supérieures à 10 mm/an à cause du manque de données (anciennes stations SLR et VLBI).

En ce qui concerne le centrage nord-sud des orbites (selon OZ), les effets saisonniers du géocentre sont de 3.5 mm (Jason-2). Il y a encore des risques d'incompatibilité entre modèle de charges et modèle de géocentre (cf. J.P. Boy, Séminaire du GRGS, Sorèze, 2015). Par exemple, [Rietbroek et al. \(2012\)](#) suggère l'application des modèles d'effet de charges océaniques dans l'analyse des données GPS pour réduire d'environ 10% l'amplitude saisonnière dans les RMS.

Enfin, l'effet même du système de référence (cas du laser, essentiellement) sur la détermination du mouvement du géocentre a été estimé à ± 1 mm avec une modification de phase allant jusqu'à 1 mois, [Collilieux et al. \(2009\)](#).

En analysant la sensibilité de quatre stations laser (Yarragadee, Greenbelt, Graz et Herstmonceux) par des données des satellites LEO (Low Earth Orbit) dans la période 2001-2005, [Lejba and Schillak \(2011\)](#) ont comparé les stabilités de positionnement. Ils ont déterminé le positionnement

TABLE 2.4 – Estimation récentes des repères par techniques (en mm) et importance des co-localisations de techniques (Journée GRASP, CNES, Paris 2014).

Objets	Estimations	Unité	Commentaires	Problèmes & Améliorations
Techniques				
Laser	4-5 (3D)	mm	30 stations	répartition géographique
DORIS			60 st.	nouvelles balises V4
(IDS 2014)	4-12 / 3-8 / 4-12	mm	N / E / H	
GPS			> 200 st.	
	3 / 3 / 10	mm	id.	nouvelles solutions i.PPP
Sites				rattachements mesurés dans 80% cas seulement
GPS <i>vs.</i> DORIS	> 10	mm	50% cas	
	± 1.5	mm/an	différences de vitesse	
GPS <i>vs.</i> laser	> 10	mm	30% cas	améliorer le vertical
horizontal	0.2	mm/an	erreur formelle	de nombreux cas > 1 mm/an
vertical	0.3	mm/an	id.	
Fact. échelle				
	6.7 ± 0.8	mm	VLBI <i>vs.</i> laser	8 co-localisations possibles

avec les valeurs de l'ITRF2005 ainsi que celles obtenues par les données de LAGEOS. Les auteurs ont montré que les résultats obtenus avec LAGEOS (7.6 mm et 0.5 mm/an pour la position et la vitesse) sont meilleurs qu'avec les satellites LEO. Mais, les données des satellites LEO ont permis d'améliorer des coordonnées en cas de peu de données de LAGEOS.

[Zelensky et al. \(2014\)](#) analysent la sensibilité des orbites LAGEOS-1 & -2 et des solutions de stations aux modèles de gravité variables (TVG-Time-Varying Gravity). Ils indiquent une amélioration de 18 % et de 10 % dans les résidus laser et RMS de stations, respectivement. [Zelensky et al. \(2010\)](#); [Jayles et al. \(2010\)](#); [Auriol and Tourain \(2010\)](#) discutent des instruments (dont le récepteur DORIS sur Jason-1 & -2), pour calculer des stations DORIS. Ils ont montré les bénéfices de données précises et fiables de DORIS pour la précision de la composante radiale d'orbite de Jason-2.

Avec l'ITRF2014 en cours de réalisation, nos travaux pourront contribuer à la connaissance des conséquences des incertitudes d'orbites sur la qualité du positionnement global.

Les mesures d'altimétrie, de distance et Doppler.

Comme dit dans la partie précédente, il y a quatre techniques spatiales différentes – laser, VLBI (non abordé dans le cadre de notre travail), GNSS (idem, non abordé) et DORIS (Table 2.5) – qui ont des apports différents sur le repère de référence (voir Table 2.4). La plus exacte des techniques de poursuite de satellites est très certainement la télémétrie laser qui, en l'espace de quarante ans environ, a gagné plusieurs ordres de grandeur tant dans l'aspect qualitatif (précision et exactitude des instruments, aujourd'hui < 1 cm) que dans l'aspect quantitatif (nombre global de données). Le laser est essentiel pour estimer le géocentre et le facteur d'échelle du repère.

TABLE 2.5 – Techniques satellites.

Techniques	Satellites	Commentaires	Références
DORIS	Cryosat-2, HY-2A, Saral SPOT-5 (fin de vie) Jason-2 SWOT, Jason-3, Sentinel-3 Jason-CS	bruit “laboratoire” : 0.2 mm/s résidus d’orbite > 0.3 mm/s Osc. DGXX plus stable aux radiations DGXX-S, dual-frequency, 7 canaux	Jayles et al. (2015)
laser	LAGEOS-1 & -2 Etalon-1 & -2 Starlette, Stella	fidélité : 2-3 mm, incertitude 10 mm essentiel pour l’ITRF apport pour ITRF	Courde (2015) Sośnica et al. (2014)
GNSS	GPS GLONASS COMPASS	vertical limité par correct. troposphérique techniques r.PPP puis i.PPP non abordé id.	Lestarquit (2015)

Les activités liées à la télémétrie laser ont été concentrées au début sur les satellites dits géodésiques, Starlette (800 km) et LAGEOS (6000 km). Leurs caractéristiques (forme, masse et altitude) ont été choisies de manière à fournir une cible de référence de très grande qualité (pour le calcul d’orbite par télémétrie laser) afin d’estimer les coordonnées des stations avec exactitude, et d’étudier le champ de gravité à grandes longueurs d’onde.

l’évolution de phénomènes dépendant du temps relatifs à des changements de forme et d’orientation de la Terre (par exemple les coefficients \dot{J}_n). Leur faible rapport surface sur masse réduit les effets des forces non gravitationnelles toujours difficiles à modéliser, et leur altitude (surtout LAGEOS) atténue les effets mal connus des très courtes longueurs d’ondes du champ de gravité de la Terre.

La technique Doppler DORIS a été mise au point par le CNES et l’IGN dans les années 1980, 90. Le succès de ce dispositif montant, dont le réseau mondial est bien réparti géographiquement, est lié au nombre de satellites porteurs ainsi qu’au taux de disponibilité du réseau qui est très élevé. Plusieurs générations d’instrument bord ont été développées, dont la dernière DGXX vole actuellement sur Jason-2 (2008), Cryosat-2 (2010), HY-2A (2011) et SARAL (2013).

Les erreurs, instrumentales et environnementales, de la fonction de mesure radar ont été étudiées par plusieurs auteurs dans le cadre de chaque mission spatiale (ex. : Jason, Saral, etc.) [Bonfond et al. \(2015\)](#). En outre, les auteurs ont montré la présence éventuelle dans les mesures de signaux faibles (de quelques mm/an) mais cumulatifs dans le temps. [Rudenko et al. \(2014\)](#) ont calculé sur plus de 20 ans la précision des orbites des satellites ERS-1&-2, T/P et Envisat) basées sur des modèles variables et statiques. Ils trouvent une différence de 3 mm/an du niveau moyen régional de la mer due aux dérives du géocentre. En calculant la solution d’orbite GDR-D du satellite Jason sur 10 ans, [Couhert et al. \(2015\)](#) ont aussi montré un budget des erreurs décennales

de mesure de poursuite de 2 mm/an. Les sites d'étalonnage de radar altimétrique en absolu ont cependant évolué vers une plus grande exactitude et un suivi permanent ce qui a eu pour effet de limiter ce point.

2.3 Futur : objectifs GGOS

Les recommandations internationales émises par le “Global Geodetic Observing System” (GGOS) sous l'égide de l'AIG (Association Internationale de Géodésie), vont dans le sens d'une meilleure estimation des produits géodésiques que sont le repère de référence global (relié à la forme de la Terre) et le champ de gravité, et leurs évolutions spatio-temporelles. Les précisions attendues sont de l'ordre de 1 mm pour le positionnement au sol et de 0.1mm/an pour les mouvements des stations, et 0.1ppb pour le facteur d'échelle et les paramètres d'orientation.

Les discussions sur les défis de la géodésie à l'horizon 2020 portent sur le changement global, et la constatation que les effets globaux sont minimes mais cumulatifs (idée que “everything is moving”). Les scientifiques parlent de “nano-géodésie” ($1 \text{ ppb} = 10^{-9}$) consistante dans le temps et l'espace, stable sur plusieurs décades. Il s'agit des trois composantes de la géodésie : la rotation de la Terre, la géométrie, la gravité / géoïde. Une des préoccupations importante est la liaison : géométrie-gravité.

Ces objectifs proviennent des recommandations et besoins en sciences de la Terre, qui sont de grandes priorités. Mais aucune technique de positionnement géodésique n'est en mesure d'atteindre ces performances, seule. Ceci est dû en partie à la non-observabilité de certains paramètres par une seule technique. Une autre limitation provient de l'extension et de la non-uniformité du réseau de poursuite et du calendrier des observations disponibles effectivement. Il y a aussi en jeu le nombre de cibles géodésiques. Enfin, une dernière limitation provient de la difficulté de mesurer les rattachements entre les centres de référence de chaque technique sur un même site.

Dans le cadre des systèmes de référence d'espace et de temps (céleste et terrestre), on parle de 5 objets principaux qui sont : *i)* stations au sol, *ii)* satellites LEO, *iii)* sat. MEO et GEO *iv)* Lune et planètes, *v)* Quasars.

En conclusion, nous pouvons dire que la géodésie spatiale a des objectifs ambitieux tout en cherchant à identifier les zones d'améliorations encore nécessaires, sur l'ensemble “réseaux mesures satellites modèles”. Un projet spatial comme GRASP (Geodetic Reference Antenna in SPace), proposé actuellement avec quatre techniques géodésiques en vol, est l'occasion de mieux comprendre les limites et de développer de nouvelles technologies tout comme de nouveaux modèles.

TABLE 2.6 – Futur GGOS (IAG, Munich 2006)

	Commentaires	Références
Repères	30 stations fondamentales marégraphes, gravimètres rattachements à 1 mm	Pearlman et al. (2007)
Objets	changement global, transport de masses modélisation, paramétrisation, conventions combinaisons géométrie et gravité pour altitudes Problèmes : inconsistance géométrie et gravité séparation des effets : locaux <i>vs.</i> régionaux niveau des mers et ITRF	Chao et al. (2000) Rummel et al. (2005)
Techniques		
laser	kHz, télescopes agiles, 2-couleurs, incertitude transpondeurs /Lune et planètes	Samain (2015)
DORIS	balises au sol (4G, avenir > 2020 ?) meilleurs oscillateurs (stabilité et radiations)	Jayles et al. (2015)
GNSS	compatibilité multi-constellations	Lestarquit (2015)
Missions	plusieurs décades (e.g. océanographie) multi-technique à bord GRASP (JPL) vols en formation = un instrument ex. : interférométrie laser Oscillateurs et horloges spatiales	Nerem et al. (2011) ACES/Pharao

2.4 Conclusion et orientation de nos travaux

Concernant la détermination d'orbite précise, on peut résumer la situation décrite plus haut comme (RMS d'orbites obtenus avec GOCOs plus ITRF2008 puis avec EIGEN-GL04S1 (TVG) plus ITRF2013) : pour LAGEOS (11-8 mm), pour Jason-2 (12.1-11.2 mm avec le laser et 0.36-0.38 mm/sec avec DORIS), et pour Saral (16.2-14.0 mm avec le laser et 0.40-0.39 mm/sec avec DORIS).

A partir de ces trois résultats, obtenus pour des altitudes différentes, une méthode analytique d'analyse d'erreurs indépendante peut-elle permettre d'identifier séparément les causes de ces incertitudes globales ?

Concernant le repère de référence global (l'évolution des paramètres de transformation) par la technique DORIS : Tx et Ty : 18-20 mm pic à pic (terme annuel résiduel de 2 et 3 mm) et pente de 0.5 et 1.5 mm /an, respectivement. La composante Tz : 45 mm pic à pic (avec 15-20 de déviation std). Les rotations Rx et Ry (pôle) : 0.34-0.30 milliarc secondes (pour 6 satellites, et le double avec

3 satellites)

L'OSTST note également le besoin d'étudier l'impact d'un champ de gravité variable (TVG) sur les solutions. Une analyse d'erreurs dite "descendante" devrait permettre de projeter puis d'intégrer les erreurs d'orbite et de mesures dans un jeu de coordonnées de stations. Est-elle en mesure de préciser les bruits et systématismes éventuellement variables à basse fréquence ?

Concernant l'altimétrie et les problèmes d'erreurs géographiquement corrélées (EGC), y compris leur évolution spatiale et surtout temporelle. Notons que l'EGC est une caractéristique intrinsèque à chaque, dont la signature dépend des paramètres orbitaux. C'est une classe d'erreurs incideuse car elle se projette directement dans les composantes à grande longueur d'onde de la surface topographique de l'océan, et car elle ne peut diminuer qu'en améliorant le modèle de champ.

Pour Saral, les différences GDR-D et GDR-E impliquent une moyenne à 9 mm et un signal annuel à 3 mm. Idem pour Jason-2, les différences s'établissent à 6 mm et 2 mm, en moyenne et en annuel, avec un effet séculaire jusqu'à 1 mm/an dans certaines grandes régions (voir Jalabert et al., OSTST 2015)⁴. Une méthode analytique peut-elle permettre d'isoler les problèmes d'origine dynamique, venant des coefficients du champ, et à quel niveau ?

Concernant les réseaux de géodésie spatiale, un travail récent pose les questions suivantes (Schillak et al., ASR 2015, sous presse) :

- quelles sont les différences de coordonnées des stations déterminées par les différentes techniques ?
- quelles sont les incertitudes individuelles, par technique, comment identifier leurs causes, et comment les mesurer ?
- quel est l'écart sur les vitesses et azimuts des stations, par technique, et quelles sont leurs causes ?
- quels sont les obstacles pour améliorer les situations ?

Un certain nombre de réponses sont apportées par les analystes, et la nouvelle solution de l'ITRF sera aussi l'occasion de fournir quelques réponses. Par exemple, la stabilité des coordonnées 3D des stations laser est d'environ 4-5 mm, alors que celle des stations GNSS est de 2 mm. L'écart moyen de vitesses horizontales entre laser et GNSS est actuellement de 1.5 mm/an, mais les meilleures déterminations sont à 0.1 mm/an. L'ensemble est très dépendant de la qualité des données laser. Les analystes ne voient pas les mêmes écarts au plan des mesures que les instrumentalistes en station ; ces écarts atteignent pourtant au plus 10 mm.

Notre travail s'inscrit dans une démarche méthodologique (fournir des outils) en montrant plusieurs situations récentes. Il est donc primordial d'établir un calcul d'erreurs fiable à partir d'incertitudes connues sur quelques sources géodynamiques ; il faut ensuite s'assurer que chaque estimation est comparable à ce qui se fait par les analystes sur la base des données et des produits

4. Site web OSTST, 2014, 2015 :

<http://www.aviso.altimetry.fr/en/user-corner/science-teams/ostst-swt-science-team.html>

scientifiques ; enfin, il faut discuter des résultats afin de démontrer le pouvoir séparateur de la méthode proposée ici.

Au-delà des résultats méthodologiques, la question se pose aujourd’hui de mieux séparer les sources d’erreurs résiduelles dans les mesures, le repère de référence, les modèles dynamiques et l’orbitographie. Comme dans les analyses globales tout est lié ou presque, il est très difficile de progresser. Une méthode indépendante peut alors être un bon outil d’analyse des causes et des effets.

Le Chapitre 3 est consacré aux méthodes, et le Chapitre 4 décrit plusieurs applications du principe et des outils des transferts d’erreurs ; les chiffres utilisés (qualité et quantité), les qualifications de données ou de modèles en sont issus.

Chapitre 3

Méthodologie

Sommaire

3.1	Dynamique orbitale	25
3.1.1	Les équations fondamentales	26
3.1.2	Théorie quasi-circulaire	28
3.1.3	Théorie de Kaula	39
3.1.4	Conclusion de la dynamique orbitale	41
3.2	Principe de la propagation d'erreurs	43
3.2.1	Les sources d'erreur retenues	44
3.3	Principe du transfert des erreurs	49
3.3.1	Les "cibles" étudiées	49
3.3.2	Erreurs d'origine dynamique	49
3.3.3	Erreurs d'origine géométrique	50

3.1 Dynamique orbitale

Au sens premier, la dynamique orbitale a pour objet de calculer des éphémérides de corps dans l'espace. Les éléments essentiels de la dynamique orbitale sont la construction d'un modèle, avec les forces en présence, le choix d'un repère de référence et l'intégration des équations du mouvement. Les types de trajectoires peuvent être très variés mais l'essentiel de notre travail porte sur des orbites de type quasi-circulaire autour de la Terre. On peut calculer des trajectoires soit sans tenir compte d'observations, c'est l'extrapolation des conditions initiales, soit en tenant compte d'observation, c'est la restitution de paramètres dont les conditions initiales.

Il est donc indispensable, dans le calcul d'orbite, d'aborder les questions suivantes : 1/ le choix des repères d'espace et de temps pour écrire et intégrer les équations du mouvement d'une

part et pour modéliser les observations d'autre part, 2/ les liaisons entre les différents repères, 3/ la paramétrisation du mouvement, en coordonnées cartésiennes ou autres, en éléments képlériens classiques ou autres, en variables canoniques, etc.

Nous nous intéressons aux théories analytiques, car nous souhaitons étudier plutôt les caractéristiques générales ou globales des trajectoires. On peut noter ici les critères fondamentaux liés à l'établissement de toute solution analytique de l'intégration des équations de mouvement : 1/ la théorie est unique, et les relations sont les mêmes pour tous les cas étudiés, 2/ les relations littérales entre causes (coefficients de modèles) et effets (termes perturbatifs sur les trajectoires) sont écrites une fois pour toute. Nous nous situons dans le cas de l'extrapolation ; nous ne manipulons aucune donnée et l'ajustement des conditions initiales se fait de manière empirique afin de trouver, pour chaque période, le jeu des paramètres moyens initiaux de l'orbite.

Originalité. Nous développons une méthode analytique, dont le but essentiel n'est pas la propagation des équations de la solution proprement dite, même si elle est une étape indispensable (calcul d'orbite), mais la propagation des erreurs d'orbite, erreurs associées aux modèles dynamiques. Dans ce contexte, ces erreurs sont considérées comme des quantités infinitésimales par rapport aux variables du mouvement et même par rapport aux termes perturbatifs.

Par rapport aux éléments elliptiques, l'utilisation de coordonnées dans les équations de la dynamique est en fait plus convaincante pour étudier les erreurs des modèles et leurs impacts sur les trajectoires puis sur les fonctions de mesure issues de celles-ci. Notre analyse veut faire intervenir, en plus des erreurs d'orbite, des relations élargies aux erreurs des mesures de poursuite sol-satellite. L'utilisation de coordonnées est donc plus efficace par rapport à l'utilisation des éléments elliptiques.

3.1.1 Les équations fondamentales

Equations du mouvement. Afin de repérer le satellite dans l'espace on peut utiliser soit les vecteurs position $\vec{x}(x, y, z)$ et vitesse $\vec{\dot{x}}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, soit les éléments orbitaux. Dans un repère fixe et inertiel, si la trajectoire est exprimé par ses vecteur \vec{x} et vitesse $\vec{\dot{x}}$, alors le Lagrangien L est (à une convention de signe près sur U) :

$$L = T + U = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{\mu}{r} \quad (3.1)$$

avec :

$\mu = GM$: produit de la constante gravitationnelle G et de la masse de la Terre,

$(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$: les composantes de $\vec{\dot{x}}$ (aussi noté $\dot{\mathbf{x}}$), et r le rayon géocentrique,

T : l'énergie cinétique,

U : le potentiel (dépend des positions uniquement).

Les équations de la dynamique, à partir du principe fondamental, ont une expression extrêmement simple en coordonnées rectangulaires géocentriques. Ainsi, exprimées dans un repère inertiel pour un satellite de masse m :

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{x} + \sum_i \frac{\partial U_i}{\partial \mathbf{x}} + \sum_j \frac{\mathbf{F}_j}{m} \quad (3.2)$$

avec :

(x, y, z) : les composantes de \vec{x} (aussi noté \mathbf{x}),

U_i : les potentiels perturbateurs (potentiel de gravité fixe, partie variable, potentiel de marées, etc.),

F_j : les forces dissipatives (dépendant des vitesses, notamment le freinage), voire non-conservatives (pressions des radiations, ombres, etc.).

Le mécanisme d'intégration de ces équations n'est pas très simple si l'on considère la solution générale. Quand il existe un potentiel perturbateur, le système des équations du mouvement n'est plus intégrable de manière complètement analytique : le mouvement n'est képlérien qu'en première approximation, même si l'on peut définir à tout instant une orbite *osculatrice* à partir des vecteurs position et vitesse.

Ces équations sont pratiques pour l'intégration numérique. En revanche, en analytique, si l'on veut contourner la difficulté propre à l'intégration, on peut considérer un développement limité de la solution "autour" d'une solution géométrique simple, celle du problème des deux corps. Dans ces conditions, le choix des paramètres (coordonnées ou éléments) et le choix du repère d'intégration s'avèrent importants. Mais, en changeant de paramètres, l'expression du potentiel perturbateur gravitationnel exprimé a priori en coordonnées sphériques dans un repère lié au centre de masse de la Terre, doit donc être transformée.

Potentiel terrestre perturbateur. L'expression du potentiel perturbateur gravitationnel exprimé en coordonnées sphériques dans un repère lié au centre de masse de la Terre est la suivante (avec $r_0, \varphi_0, \lambda_0$ dans le repère fixe de la Terre) :

$$U^* = \frac{\mu}{r_0} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left(\frac{a_e}{r_0} \right)^l P_{lm}(\sin \varphi_0) (C_{lm} - j S_{lm}) \exp jm\lambda_0 \quad (3.3)$$

- . a_e : rayon équatorial de la Terre.
- . C_{lm}, S_{lm} : coefficients harmoniques sphériques normalisés décrivant le potentiel de gravité.
- . P_{lm} : fonctions de Legendre associées.
- . $r_0, \varphi_0, \lambda_0$: coordonnées sphériques du satellite.

Suivant les paramètres utilisés, on développe donc le potentiel perturbateur auquel est soumis le satellite, avec les variables de la solution. Soit en éléments orbitaux képlériens (Kaula), soit en coordonnées sphériques dans le plan orbital précessant (notre cas) pour évaluer les perturbations.

3.1.2 Théorie quasi-circulaire

Sachant le développement “naturel” du potentiel de gravité terrestre en coordonnées sphériques, et sachant que les trajectoires étudiées seront plutôt circulaires ou quasi-circulaires, nous faisons le choix des coordonnées sphériques (r, φ, λ) . Elles permettent de représenter simplement (cas non perturbé) la plupart des cas envisagés. Les équations de Lagrange classiques et donc la théorie de Kaula ne sont pas adaptés au cas d’excentricité nulle ($e = 0$), voire même ont des difficultés avec $e < 0.005$.

Note. Nous pouvons noter, dans la bibliographie en dynamique orbitale, plusieurs auteurs et méthodes sur le principe du calcul de l’erreur radiale d’orbite. Selon [Balmino and Perosanz \(1995\)](#), on trouve soit une projection des termes perturbateurs de Kaula, soit les équations de Hill. En outre, les travaux de [Rosborough and Tapley \(1987\)](#) sur l’erreur radiale d’orbite sont assez proches d’une projection, à partir d’expressions analytiques de type Kaula. Les auteurs (Balmino, Sneeuw, Schrama, Rosborough, etc.) ont étudié les mêmes méthodes analytiques puissantes et parfois réadaptées, dont l’origine est dans [Kaula \(1966\)](#). Par exemple :

$$\begin{cases} \Delta r = \frac{\partial r}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial r}{\partial e} \Delta e + \frac{\partial r}{\partial M} \Delta M \\ \Delta \zeta = r \Delta(\omega + v) + r \Delta \Omega \cos i \\ \Delta \eta = r \Delta i \sin(\omega + v) - r \Delta \Omega \sin i \cos(\omega + v) \end{cases} \quad (3.4)$$

avec :

$(a, e, i, \Omega, \omega, M)$: les éléments képlériens de la trajectoire,

$\Delta a, \Delta e, \dots$: les perturbations de Kaula sur les éléments.

Origine. La théorie publiée initialement par [Bois \(1992\)](#) nous paraît cependant plus adaptée et efficace. En tant que théorie basée sur des équations du second degré du temps, elle permet de prendre en compte des potentiels et des forces. Le principe est le suivant. Si on choisit un repère géocentrique pour représenter la trajectoire du satellite, on a une relation entre les coordonnées (x, y, z) et (r, φ, λ) :

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \lambda \\ y = r \cos \varphi \sin \lambda \\ z = r \sin \varphi \end{cases} \quad (3.5)$$

Mais, si l’on se place dans le plan orbital (précessant) de la trajectoire, la solution géométrique de référence est la suivante : $(r = r_0, \varphi = \varphi_0 = 0, \lambda = n(t - t_0) + \lambda_0)$. Elle est donc triviale et peut servir de base (solution dite d’ordre zéro) au développement d’une solution perturbée.

Ceci implique alors d’établir les équations du mouvement du satellite, en utilisant les coordonnées sphériques dans le plan d’orbite précessant, par rapport au repère fixe inertiel. Il faut donc

calculer la composition des vitesses entre le repère fixe et notre repère d'intégration ; il y a deux rotations à effectuer : une autour de Oz de $\Omega(t)$ (angle qui correspond au noeud de la trajectoire et à sa dérive temporelle due à l'aplatissement de la Terre) et une autour de Ox de i (inclinaison du plan de l'orbite par rapport au plan fixe Oxy que l'on considérera comme constante).

Equations du mouvement. D'après l'algorithme de Lagrange, on peut facilement former les équations du mouvement :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (3.6)$$

où : q_i : sont les coordonnées.

Ainsi, en coordonnées sphériques dans le repère fixe $Oxyz$:

$$T = \frac{1}{2} \left(\dot{r}^2 + (r \dot{\varphi})^2 + (r \cos \varphi \dot{\lambda})^2 \right) \quad (3.7)$$

où : $(\dot{r}), (r \dot{\varphi}), (r \cos \varphi \dot{\lambda})$: sont les coordonnées de la vitesse. En utilisant l'algorithme lagrangien on obtient les équations du mouvement :

$$\begin{cases} \ddot{r} = r \cos^2 \varphi \dot{\lambda}^2 + r \dot{\varphi}^2 - \frac{\mu}{r^2} \\ \ddot{\varphi} = -2 \frac{\dot{r}}{r} \dot{\varphi} - \cos \varphi \sin \varphi \dot{\lambda}^2 \\ \ddot{\lambda} = -2 \frac{\dot{r}}{r} \dot{\lambda} + \frac{2 \sin \varphi}{\cos \varphi} \dot{\lambda} \dot{\varphi} \end{cases} \quad (3.8)$$

Il faut maintenant se situer dans le repère mobile ($Ox'y'z'$) : le plan d'orbite moyen précessant. Si (x', y', z') sont les nouvelles coordonnées du satellite :

$$\begin{cases} x' = r' \cos \varphi' \cos \lambda' \\ y' = r' \cos \varphi' \sin \lambda' \\ z' = r' \sin \varphi' \end{cases} \quad (3.9)$$

Il faut ensuite calculer la combinaison de vitesse, due à la rotation en $\Omega(t)$ qui dépend du temps (à cause des effets séculaires dus à l'aplatissement de la Terre), à partir de : $(x, y, z)^T = R_3(-\Omega(t)) R_1(-i) (x', y', z')^T$. On en déduit la nouvelle expression de l'énergie cinétique, en coordonnées sphériques dans le repère mobile :

$$T = \frac{1}{2} \left(\dot{r}'^2 + (r' \dot{\varphi}' - r' \dot{\Omega} \sin i \cos \lambda')^2 + (r' \cos \varphi' (\dot{\lambda}' - \dot{\Omega} \cos i) - r' \sin \varphi' \dot{\Omega} \sin i \sin \lambda')^2 \right) \quad (3.10)$$

avec :

$$L = T + U(r', \varphi', \lambda'; i, \Omega) \quad (3.11)$$

Dans le repère mobile choisi, on peut réécrire les équations du mouvement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{r}' - r' \dot{\varphi}'^2 + 2r' \dot{\varphi}' \dot{\Omega} \sin i \cos \lambda' - r' \dot{\Omega} \sin^2 i \cos^2 \lambda' - 2r' \cos^2 \varphi' \dot{\lambda}' \dot{\Omega} \cos i + 2r' \cos \varphi' \dot{\lambda}' \dot{\Omega} \sin \varphi' \sin \lambda' \sin i \\ \quad - r' \cos^2 \varphi' \dot{\lambda}'^2 - r' \cos^2 \varphi' \dot{\Omega}^2 \cos^2 i + 2r' \cos \varphi' \dot{\Omega}^2 \sin \varphi' \sin \lambda' \sin i \cos i - r' \sin^2 \varphi' \dot{\Omega}^2 \sin^2 \lambda' \sin^2 i + \frac{\mu}{r'^2} = 0 \\ \\ r'^2 \ddot{\varphi}' + 2r' \dot{\varphi}' \dot{r}' - 2r' \dot{\Omega} \dot{r}' \sin i \cos \lambda' + r'^2 \dot{\Omega} \dot{\lambda}' \sin i \sin \lambda' + r'^2 \dot{\lambda}'^2 \sin \varphi' \cos \varphi' - 2r'^2 \dot{\lambda}' \dot{\Omega} \sin \varphi' \cos \varphi' \sin i \\ \quad + r'^2 \dot{\lambda}' \dot{\Omega} \sin \lambda' \cos^2 \varphi' \sin i - r'^2 \dot{\Omega}^2 \sin \lambda' \cos^2 \varphi' \sin i \cos i - r'^2 \dot{\lambda}' \dot{\Omega} \sin \lambda' \sin^2 \varphi' \sin i + r'^2 \dot{\Omega}^2 \sin \lambda' \sin^2 \varphi' \sin i \cos i \\ \quad + r'^2 \dot{\Omega}^2 \sin \varphi' \cos \varphi' \cos^2 i - r'^2 \dot{\Omega}^2 \sin^2 \lambda' \sin \varphi' \cos \varphi' \sin^2 i = 0 \\ \\ r'^2 \cos^2 \varphi' \ddot{\lambda}' - 2r'^2 \dot{\lambda}' \dot{\varphi}' \sin \varphi' \cos \varphi' - 2r' \dot{r}' \dot{\Omega} \cos^2 \varphi' \cos i + 2r'^2 \dot{\varphi}' \dot{\Omega} \sin \varphi' \cos \varphi' \cos i - 2r' \dot{r}' \dot{\Omega} \sin \lambda' \sin \varphi' \cos \varphi' \sin i \\ \quad + 2r' \dot{\lambda}' \dot{r}' \cos^2 \varphi' - 2r'^2 \dot{\varphi}' \dot{\Omega} \sin \lambda' \cos^2 \varphi' \sin i + r'^2 \dot{\Omega}^2 \sin \lambda' \cos \lambda' \sin^2 i - r'^2 \dot{\Omega}^2 \cos \lambda' \sin \varphi' \cos \varphi' \sin i \cos i \\ \quad - r'^2 \dot{\Omega}^2 \sin \lambda' \cos \lambda' \sin^2 \varphi' \sin^2 i = 0 \end{array} \right. \quad (3.12)$$

Les équations du mouvement (3.12) sont complexes. Cependant, la théorie d'ordre un implique de développer les coordonnées sphériques du satellite (r', φ', λ') en deux parties : la solution initiale $(r'_0, \varphi'_0, \lambda'_0)$: problème des deux corps) et les perturbations sur l'orbite nommées $(r'_1, \varphi'_1, \lambda'_1)$. Cette relation a pour expression :

$$\left\{ \begin{array}{l} r' = r'_0 + (\rho_1 + r_1^*) \\ \varphi' = \varphi'_0 + (\sigma_1 + \varphi_1^*) \\ \lambda' = n(t - t_0) + (n_1(t - t_0) + \lambda_1^*) \end{array} \right. \quad (3.13)$$

avec :

n : le mouvement moyen de la trajectoire,

$r'_0 = \text{constante}$, $\varphi'_0 = 0$, $\lambda'_0 = n(t - t_0)$: la solution à l'ordre zéro dans le plan moyen de l'orbite (i est constant mais Ω sera linéaire par rapport au temps),

ρ_1, σ_1, n_1 : des termes constants ou séculaire (pour n_1),

$r_1^*, \varphi_1^*, \lambda_1^*$: les termes périodiques d'ordre un par rapport au petit paramètre ε .

L'intégration des équations du mouvement du second degré par rapport au temps, consiste à faire l'hypothèse d'une solution développable en séries multi-périodiques, a priori mise sous la forme [Exertier and Bonnefond \(1997\)](#) :

$$\left\{ \begin{array}{l} r_1^* = \frac{1}{\dot{\psi}_{km}} \sum_{k,m} r_1^c \cos \psi_{km} + r_1^s \sin \psi_{km} \\ \varphi_1^* = \frac{1}{\dot{\psi}_{km}} \sum_{k,m} \varphi_1^c \cos \psi_{km} + \varphi_1^s \sin \psi_{km} \\ \lambda_1^* = \frac{1}{\dot{\psi}_{km}} \sum_{k,m} \lambda_1^c \cos \psi_{km} + \lambda_1^s \sin \psi_{km} \end{array} \right. \quad (3.14)$$

avec ψ_{km} une combinaison linéaire des angles du satellite (Ω, λ' et θ l'angle sidéral de la Terre) et sa dérivée $\dot{\psi}_{km}$. On peut établir les nouvelles équations du mouvement, développées à l'ordre un :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \ddot{r}'_1 - 3\varepsilon n^2 r'_1 - 2\varepsilon r'_0 n \dot{\lambda}'_1 - 2\varepsilon r'_0 n \dot{\Omega} \cos i = -\frac{\partial U^*}{\partial r'_1} \\ \varepsilon \ddot{\varphi}'_1 + \varepsilon \varphi'_1 (n - \dot{\Omega} \cos i)^2 + 2\varepsilon n \dot{\Omega} \sin i \sin \lambda' = \frac{1}{r'^2_0} \frac{\partial U^*}{\partial \varphi'_1} \\ \varepsilon \ddot{\lambda}'_1 + \frac{2}{r'^2_0} \varepsilon' \dot{r}'_1 (n - \dot{\Omega} \cos i) = \frac{1}{r'^2_0} \frac{\partial U^*}{\partial \lambda'_1} \end{array} \right. \quad (3.15)$$

avec :

U^* : le potentiel perturbateur, défini plus haut (par exemple, le potentiel terrestre),

$$-\frac{\mu}{r'^2} = -\frac{\mu}{r'^2_0} + \varepsilon \left(2 \frac{\mu}{r'^3_0} \right) r'_1 - \frac{\partial U^*}{\partial r'_1}$$

$$\text{et : } \varepsilon \left(2 \frac{\mu}{r'^3_0} \right) r'_1 = 2\varepsilon n^2 r'_1$$

La forme de la solution du mouvement étant un développement en séries de Fourier des angles de l'orbite, comme le principe de l'intégration des équations du mouvement se fait par identification des membres de droite et gauche, on choisit donc de mettre les membres de droite des trois équations ci-dessus sous la forme générale suivante :

$$\begin{aligned} &= \sum_{k,m}^l (q_{km} \cos \psi_{km} + p_{km} \sin \psi_{km}) + K_F \\ &= \sum_{k,m}^l (t_{km} \cos \psi_{km} + r_{km} \sin \psi_{km}) + K_G \\ &= \sum_{k,m}^l (v_{km} \cos \psi_{km} + u_{km} \sin \psi_{km}) \end{aligned}$$

où (p, q, r, t, u, v) sont les coefficients des parties périodiques et K_F, K_G ceux des parties constantes. A partir de cet ensemble, on peut déduire de l'identification entre les deux membres des équations, la forme des coefficients de la solution r_1^c, r_1^s , etc. Des lois de formation, S_1, S_2, S_3 par variable, sont prévues par Bois (1992) ; elles sont nécessaire au calcul de la solution.

Les équations (3.15) montrent que les dérivées $\left(\frac{\partial U^*}{\partial r'_1}, \frac{\partial U^*}{\partial \lambda'_1} \right)$ sont couplées entre les variables r'_1, λ'_1 , alors que $\left(\frac{\partial U^*}{\partial \varphi'_1} \right)$ est indépendante pour φ'_1 . On pourra donc résoudre celle-ci toute seule. En outre, cette équation a un terme $(2n\dot{\Omega} \sin i \sin \lambda'_1)$ qui donnera l'occasion de calculer directement le coefficient $\dot{\Omega}$ à partir du terme en $\sin \lambda'_1$ contenu dans la dérivée de U^* correspondante. Ce terme est d'ordre un en ε ; nous ne prendrons donc pas en compte les termes en $\dot{\Omega}^2$.

Champ de gravité. On démarre de l'expression du potentiel de gravité perturbateur U^* donnée plus haut. Mais on considère dans notre contexte les coordonnées sphériques du satellite dans le repère du plan de l'orbite. On applique donc à U^* (HS normalisés) les fonctions de rotation des harmoniques données par [Balmino et al. \(1996\)](#)¹ :

$$\begin{aligned} U_l^* &= \frac{\mu}{r_0'} \left(\frac{a_e}{r_0'} \right)^l \sum_{k=-l}^{+l} \sum_{m=0}^l P_{lk}(\sin \varphi_0') d_{lmk}(i) (C_{lm} - j S_{lm}) \exp j \psi_{km} \\ \psi_{km} &= k \left(\lambda_0' + \frac{\pi}{2} \right) + m \left(\Omega - \theta - \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.16)$$

La fonction de rotation des harmoniques sphériques $d_{lmk}(i)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} d_{lmk}(i) &= (-1)^{l-m} \frac{(l-k)!}{(l-m)!} \zeta_{lmk}(i) \\ \zeta_{lmk}(i) &= \sum_{t=t_1}^{t_2} (-1)^t \binom{l-m}{t} \binom{l+m}{m+k+t} C^{2t+m+k} S^{2l-2t-(m+k)} \end{aligned} \quad (3.17)$$

où :

- i est l'angle d'inclinaison du plan orbital
- $\begin{cases} t_1 = \text{Max}(0, -m-k) \\ t_2 = \text{Min}(l-m, l-k) \end{cases}$
- $\begin{cases} C = \cos\left(\frac{i}{2}\right) \\ S = \sin\left(\frac{i}{2}\right) \end{cases}$

Avec les propriétés utiles des polynômes et fonctions de Legendre $P_{lk}(0) = 0$ pour $(l-k)$ impair alors que $P'_{lk}(0) = 0$ pour $(l-k)$ pair, on a alors des expressions de dérivée du potentiel perturbateur (3.17) par rapport aux coordonnées correspondantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^*}{\partial r'} &= -\frac{\mu}{r_0'^2} \left(\frac{a_e}{r_0'} \right)^l (l+1) \sum_{k=-l}^{+l} \sum_{m=0}^l P_{lk}(\sin \varphi_0') d_{lmk}(i) \{C_{lm} \cos \psi_{km} + S_{lm} \sin \psi_{km}\} \\ \frac{1}{r_0'^2} \frac{\partial U^*}{\partial \varphi'} &= \frac{\mu}{r_0'^3} \left(\frac{a_e}{r_0'} \right)^l \sum_{k=-l}^{+l} \sum_{m=0}^l P'_{lk}(\sin \varphi_0') d_{lmk}(i) \{C_{lm} \cos \psi_{km} + S_{lm} \sin \psi_{km}\} \\ \frac{1}{r_0'^2} \frac{\partial U^*}{\partial \lambda'} &= \dot{\psi} \frac{\mu}{r_0'^3} \left(\frac{a_e}{r_0'} \right)^l \sum_{k=-l}^{+l} \sum_{m=0}^l P_{lk}(\sin \varphi_0') d_{lmk}(i) \{C_{lm} \cos \psi_{km} + S_{lm} \sin \psi_{km}\} \end{aligned}$$

On a trois paires de correspondances entre les équations de la forme de la solution et la forme des second membres, ce pour déterminer les termes constants, séculaires et périodiques de la théorie. A cause de relations complexes entre les variables (r_1^c, r_1^s) et $(\lambda_1^c, \lambda_1^s)$ dans les équations,

1. Cette séquence 3-1-3 de rotation est différente la séquence 3-2-3 dédié par [Wigner \(1959\)](#). Il faut donc soustraire $\frac{\pi}{2}$ à la première rotation et ajouter $\frac{\pi}{2}$ à la troisième rotation.

il faut utiliser l'algorithme d'intégration de Bois (1992) ; mais l'équation en φ' peut être résolue assez simplement. On constate aussi que la théorie est développée avec les indices (l, m, k) et la fréquence : $\dot{\psi}_{km} = k \dot{\lambda}'_0 + m(\dot{\Omega} - \dot{\theta})$, avec $\dot{\lambda}'_0 = n$.

Terme constant. En analysant la cohérence des deux membres de l'équation en φ' on voit que la composante constante pour le cas des indices $m = k = 0$, nous permet d'écrire l'expression :

$$\sigma_1 = \frac{n^2}{(n - \dot{\Omega} \cos i)^2} \sum_{l=3}^{l_{Max}} \left(\frac{a_e}{r'_0} \right)^l P'_{l0}(0) d_{l00}(i) C_{l0} \quad (3.18)$$

avec $K_G = -n^2 r'_0 \sum_{l=2}^{l_{Max}} \left(\frac{a_e}{r'_0} \right)^l (l+1) P'_{l1}(0) d_{l01} C_{l0}$.

Ainsi ce terme constant σ_1 représente un “disymétrie” de la trajectoire autour de plan orbital ($Ox'y'$) et dépend des coefficients harmoniques zonaux impairs.

Termes séculaires. En revanche pour des cas dépendants de l'indice k non nul, si on fait une hypothèse que le terme séculaires $\dot{\Omega}$ vient du cas $k = 1, m = 0, l$ pair, on a alors :

$$\dot{\Omega} = -\frac{1}{2} \frac{n}{\sin i} \sum_{l=2}^{l_{Max}} \left(\frac{a_e}{r_0} \right)^l \left\{ -P'_{l1}(0) d_{l01}(i) + P'_{l,-1}(0) d_{l0,-1}(i) \right\} C_{l0} \quad (3.19)$$

Par conséquent ce terme est fonction des coefficients harmoniques zonaux pairs. On peut alors obtenir la valeur classique de l'effet séculaire : $\dot{\Omega} = \frac{3}{2} n \left(\frac{a_e}{r_0} \right)^2 \cos i C_{20}$, pour le cas $l=2, m=0, k=\pm 1$.

D'un autre côté, on regarde les deux paires d'équations en r', λ' . Dans ce cas-là on reconnaît qu'il y a seulement le coefficient séculaire n_1 qui existe pour le cas : $(k = 0, m = 0, l : \text{pair})$. On a alors l'expression :

$$n_1 = -\frac{1}{2r'_0} \left[\frac{K_F + 2r'_0 n \dot{\Omega} \cos i}{n} + 3\rho_1 n \right] \quad (3.20)$$

avec $K_F = -n^2 r'_0 \sum_{l=2}^{l_{Max}} \left(\frac{a_e}{r'_0} \right)^l (l+1) P_{l0}(0) d_{l00} C_{l0}$.

En appliquant ce terme séculaire n_1 , cela nous permet de déterminer le taux de précession en longitude d'une orbite circulaire, donc l'équivalent de $\dot{\omega} + \dot{M}$ pour le cas général (Kaula). Ainsi les deux termes séculaires n_1 et $\dot{\Omega}$ sont liés aux coefficients harmoniques zonaux pairs du champ de gravité.

Termes périodiques. Concernant le calcul des termes périodiques, pour le cas $(k \text{ et } m \neq 0)$, il

faut faire attention à $(l - k)$ pair dans les expression des variables $(r_1^c, r_1^s, \lambda_1^c, \lambda_1^s)$ et à $(l - k)$ impair pour $(\varphi_1^c, \varphi_1^s)$. En outre, il faut exclure les cas particuliers présentés ci-dessus.

Les équations en φ' nous permettent de développer directement les termes périodiques $(\varphi_1^c, \varphi_1^s)$ de la solution :

$$\begin{cases} \varphi_1^c = \frac{n^2 \dot{\psi}}{[(n - \dot{\Omega} \cos i)^2 - \dot{\psi}^2]} \sum_{l=2}^{l_{Max}} \left(\frac{a_e}{r_0} \right)^l \sum_{m=0}^l \sum_{k=-l}^{+l} P'_{lk}(0) d_{lmk}(i) C_{lm} \\ \varphi_1^s = \frac{n^2 \dot{\psi}}{[(n - \dot{\Omega} \cos i)^2 - \dot{\psi}^2]} \sum_{l=2}^{l_{Max}} \left(\frac{a_e}{r_0} \right)^l \sum_{m=0}^l \sum_{k=-l}^{+l} P'_{lk}(0) d_{lmk}(i) S_{lm} \end{cases} \quad (3.21)$$

Pour les variables restantes $(r_1^c, r_1^s, \lambda_1^c, \lambda_1^s)$ de la solution, on obtient :

$$\begin{cases} [a r_1^c - b \lambda_1^s] \cos \psi = A \cos \psi \\ [a r_1^s + b \lambda_1^c] \sin \psi = B \sin \psi \\ [c r_1^s - d \lambda_1^c] \cos \psi = C \cos \psi \\ [-c r_1^c - d \lambda_1^s] \sin \psi = D \sin \psi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1^c = \frac{-bD + dA}{bc + da} \\ r_1^s = \frac{bC + dB}{bc + da} \\ \lambda_1^c = \frac{-aC + cB}{bc + da} \\ \lambda_1^s = -\frac{aD + cA}{bc + da} \end{cases} \quad (3.22)$$

où :

$$\begin{cases} A = -\frac{\mu}{r_0'^2} \left(\frac{a_e}{r_0} \right)^l (l+1) \sum_{m=0}^l \sum_{k=-l}^{+l} P_{lk}(\sin \varphi_0') d_{lmk}(i) C_{lm} \\ B = -\frac{\mu}{r_0'^2} \left(\frac{a_e}{r_0} \right)^l (l+1) \sum_{m=0}^l \sum_{k=-l}^{+l} P_{lk}(\sin \varphi_0') d_{lmk}(i) S_{lm} \\ C = \dot{\psi} \frac{\mu}{r_0'^3} \left(\frac{a_e}{r_0} \right)^l \sum_{m=0}^l \sum_{k=-l}^{+l} P_{lk}(\sin \varphi_0') d_{lmk}(i) C_{lm} \\ D = \dot{\psi} \frac{\mu}{r_0'^3} \left(\frac{a_e}{r_0} \right)^l \sum_{m=0}^l \sum_{k=-l}^{+l} P_{lk}(\sin \varphi_0') d_{lmk}(i) S_{lm} \end{cases} \quad \& \quad \begin{cases} a = -\dot{\psi} - \frac{3n^2}{\dot{\psi}} \\ b = 2r_0' n \\ c = \frac{2}{r_0'} (n - \dot{\Omega} \cos i) \\ d = \dot{\psi} \end{cases}$$

Les termes périodiques sont organisés en jeux d'indices (k, m) , auxquels on peut faire correspondre la fréquence : $kn + m(\dot{\Omega} - \dot{\theta})$. Comme il est question dans la théorie de Kaula, on peut discuter des termes de la solution en fonction de la valeur des indices, dont (l, m) qui viennent du développement en harmoniques du champ de gravité :

- si $m = 0$, il s'agit de coefficients zonaux du géopotentiel, qui produiront donc soit des termes séculaires $k = 0$ et l pairs (donc sur r_1', λ_1' ou sur Ω , soit des termes constants ($k = 0$ et l impairs donc sur φ_1'), soit des termes multi-périodiques pour $k \neq 0$.

En particulier, pour $k = 1$, le dénominateur des solutions étant en $[(n - \dot{\Omega} \cos i)^2 - \dot{\psi}_{km}^2]$, on devra traiter les cas avec précautions.

- si $m \neq 0$, il s'agit de coefficients tesseraux. Là aussi, on peut retrouver des petits diviseurs, notamment pour certaines valeurs de k, m et de n, θ : ce sont des résonances.

Difficulté de la solution. Dans le développement du potentiel perturbateur, pour le cas $l \gg 1$, on constate que le calcul des dérivées partielles par rapport aux coordonnées sphériques n'est pas simple. Les calculs des fonctions d'inclinaison et des polynômes et fonctions associées de Legendre sont complexes. Tout d'abord, on sait que les valeurs des fonctions de Legendre augmentent très rapidement selon la croissance des valeurs d'indice l . Ceci n'est pas favorable aux calculs numériques. D'autre part, l'efficacité et la stabilité de la méthode de calcul des fonctions d'inclinaison sont des défis. C'est pourquoi l'on a introduit des coefficients harmoniques normalisés et surtout des relations de récurrence stables [Sneeuw \(1992\)](#).

Champ de pression de radiation solaire. Dans le cadre de la théorie quasi-circulaire, nous avons souhaité pouvoir prendre en compte des erreurs de modèle provenant de la pression de radiation solaire directe. Cette force non conservative est relativement plus importante à altitude élevée. Les phénomènes étudiés récemment du point de vue de l'erreur de modélisation, viennent principalement soit de l'erreur d'alignement des panneaux solaires soit des passages du satellite dans l'ombre de la Terre. Les problèmes suggérés par les auteurs viennent de la loi d'attitude parfois complexe du satellite, ce qui est donc difficile à modéliser exactement. Les problèmes viennent également de la complexité de calculer proprement les variations rapides de la pression de radiation pour les entrées et les sorties de la trajectoire dans l'ombre de la Terre. Enfin, les problèmes viennent aussi d'une incertitude sur la connaissance des propriétés des surfaces exposées au rayonnement (formes des différentes parties, réflexion spéculaire, ou autre, etc.), ce qui ajoute à l'incertitude sur le coefficient de réflectivité donc sur la force (ici le champ).

Pour cela, et pour d'autres raisons concernant la limite des modèles non conservatifs et aussi dissipatifs, les analystes ont mis au point des jeux de forces empiriques, dont les coefficients sont ajustés à chaque calcul d'orbite, donc sur quelques jours. Ces coefficients sont à la période orbitale, voire aussi à la journée.

La formulation de l'accélération est donnée, i.e. [Mello \(1972\)](#) par :

$$\bar{a}_{PR} = -c_R \frac{A}{m} p_{SR} \frac{r_{\odot \text{ sat}}}{|r_{\odot \text{ sat}}|}$$

où :

$\sigma = c_R \frac{A}{m} p_{SR}$: le coefficient de la pression de radiation,

c_R : coefficient de réflectivité du satellite (en fait un modèle complexe basé sur les éléments finis, avec plusieurs faces),

$p_{SR} = C_{\odot} \left(\frac{a_{\odot}}{r_{\odot}} \right)^2$, avec :

C_{\odot} : constante d'éclairement solaire modulée par le rapport du demi-grand axe de l'orbite terrestre a_{\odot} au rayon instantané r_{\odot} ,

A, m : surface et masse du satellite,

$r_{\odot \text{ sat}}$: le vecteur Soleil-satellite.

On déduit, hors effet d'ombre, le potentiel suivant :

$$\begin{aligned} U_{PR} &= -\sigma r P_{1,0}(\cos \Psi) \\ \cos \Psi &= \sin \varphi \sin \varphi_{\odot} + \cos \varphi \cos \varphi_{\odot} \cos(\alpha_{\odot} - \lambda) \end{aligned} \quad (3.23)$$

avec :

Ψ : l'angle géocentrique satellite-Soleil,

$(\varphi_{\odot}, \alpha_{\odot})$: les coordonnées angulaires du Soleil dans l'équateur terrestre,

$P_{1,0}(\cos \Psi)$: polynôme de Legendre, $(\cos \Psi)$.

L'approximation qui est effectuée ici, consiste à remplacer le vecteur $r_{\odot \text{ sat}}$ par le vecteur $r_{\odot T}$, où T est le centre de la Terre. Par rapport à l'approximation d'ordre un de la théorie, ceci est bien justifié.

D'après les relations dans le triangle sphérique et avec (λ_{\odot}^E) la longitude du Soleil dans l'écliptique et ε_{\odot} l'obliquité de l'orbite terrestre :

$$\begin{aligned} \cos \varphi_{\odot} \sin \alpha_{\odot} &= \sin \lambda_{\odot}^E \cos \varepsilon_{\odot} \\ \cos \varphi_{\odot} \cos \alpha_{\odot} &= \cos \lambda_{\odot}^E \\ \sin \varphi_{\odot} &= \sin \lambda_{\odot}^E \sin \varepsilon_{\odot} \end{aligned}$$

On écrira $P_{1,0}(\cos \Psi)$ sous la forme :

$$\begin{aligned} P_{1,0}(\cos \Psi) &= \sin \lambda_{\odot}^E \sin \varepsilon_{\odot} P_{1,0}(\sin \varphi) + P_{1,1}(\sin \varphi) [\cos \lambda_{\odot}^E - j \sin \lambda_{\odot}^E \cos \varepsilon_{\odot}] \exp j \lambda \\ P_{1,0}(\sin \varphi) &= \sum_{-1}^{+1} (1 - m')! (-1) C_{1,0}^{m'}(i) P_{1,m'}(\sin \varphi') \exp j m' (\lambda' + \frac{\pi}{2}) \\ P_{1,1}(\sin \varphi) \exp j \lambda &= \sum_{-1}^{+1} (1 - m')! C_{1,1}^{m'}(i) P_{1,m'}(\sin \varphi') \exp j \left[m' (\lambda' + \frac{\pi}{2}) + \Omega - \frac{\pi}{2} \right] \end{aligned}$$

En tenant compte de la parité de $(1 - m')$, nous pouvons calculer les dérivées partielles du champ U_{PR} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{PR}}{\partial \varphi'} &= - \sigma r'_0 \sin \lambda_{\odot}^E \sin \varepsilon_{\odot} \cos i \\ &\quad - \sigma r'_0 \sin i \left[\cos \lambda_{\odot}^E \cos(\Omega - \frac{\pi}{2}) + \sin \lambda_{\odot}^E \cos \varepsilon_{\odot} \sin(\Omega - \frac{\pi}{2}) \right] \end{aligned} \quad (3.24)$$

C'est un terme à longue période, que nous identifierons au terme σ_1 de la théorie contenu dans φ'_1 .

Les deux autres dérivées partielles sont :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{PR}}{\partial r'} = & - \sigma \sin \lambda_{\odot}^E \sin \varepsilon_{\odot} \sin i \sin \lambda' \\ & - \sigma \frac{1}{2} (1 + \cos i) \left[\cos \lambda_{\odot}^E \cos(\lambda' + \Omega) + \sin \lambda_{\odot}^E \cos \varepsilon_{\odot} \sin(\lambda' + \Omega) \right] \\ & + \sigma \frac{1}{2} (1 - \cos i) \left[-\cos \lambda_{\odot}^E \cos(\lambda' - \Omega) + \sin \lambda_{\odot}^E \cos \varepsilon_{\odot} \sin(\lambda' - \Omega) \right] \end{aligned} \quad (3.25)$$

et :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{PR}}{\partial \lambda'} = & - \sigma r'_0 \sin \lambda_{\odot}^E \sin \varepsilon_{\odot} \sin i \cos \lambda' \\ & - \sigma r'_0 \frac{1}{2} (1 + \cos i) \left[-\cos \lambda_{\odot}^E \sin(\lambda' + \Omega) + \sin \lambda_{\odot}^E \cos \varepsilon_{\odot} \cos(\lambda' + \Omega) \right] \\ & + \sigma r'_0 \frac{1}{2} (1 - \cos i) \left[\cos \lambda_{\odot}^E \sin(\lambda' - \Omega) + \sin \lambda_{\odot}^E \cos \varepsilon_{\odot} \cos(\lambda' - \Omega) \right] \end{aligned} \quad (3.26)$$

A l'aide de cette formulation, on voit clairement que le second membre en φ' comporte deux termes périodiques ; la solution comportera donc deux termes : à longue période en $\sin \lambda_{\odot}^E$, et un second combiné en $\Omega + \lambda_{\odot}^E$. Les solutions en r' et en λ' comportent des termes périodiques soit en $\sin \lambda'$ (singuliers au sens de la théorie, car $m = 0, k = \pm 1$), soit en \sin ou $\cos(\lambda' \pm \Omega)$.

Marées océaniques. Rappel du potentiel de marées, tel qu'il est développé en N ondes et en harmoniques sphériques (degré et ordre lm) :

$$U_{MO} = 4\pi G a_e \rho_w \sum_N \sum_{l=2}^L \frac{1 + k'_l}{2l + 1} \left(\frac{a_e}{r} \right)^{l+1} \sum_{m=0}^l \xi_{N,lm} \quad (3.27)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \xi_{N,lm} &= \sum_{+} \left[C_{N,lm}^{\pm} \cos(\sigma_N \pm m(\lambda + \theta)) + S_{N,lm}^{\pm} \sin(\sigma_N \pm m(\lambda + \theta)) \right] P_{lm}(\sin \varphi) \\ &= \sum_{+} \left[C_{N,lm}^{\pm} \mp j S_{N,lm}^{\pm} \right] \exp^{j \pm \sigma_N + m(\lambda + \theta)} P_{lm}(\sin \varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_n &= n_1(\theta + \pi) + (n_2 - n_1 - 5)s + (n_3 - 5)h + (n_4 - 5)p + (n_5 - 5)N' + (n_6 - 5)p_s \\ \tau &= \theta + \pi - s \end{aligned}$$

où :

- . ρ_w : la densité de l'eau de mer (environ 1025 kg / m³),
- . k'_l : sont les coefficients de charge de degré l ,
- . $C/S_{N,lm}^{\pm}$: sont les coefficients harmoniques de chaque onde N , à longue période, mensuelle,

diurne et semi-diurne.

- . n_i : les numéros de Doodson,
- . τ : le jour lunaire moyen,
- . s : le mois tropique moyen,
- . h : l'année tropique moyenne,
- . p : la rév. du périégée lunaire moyen,
- . N' : la rév. du noeud lunaire moyen,
- . p_s : la rév. du périhélie.

Ici encore, nous faisons intervenir les deux rotations des harmoniques sphériques (i, Ω) . Les fonctions transformées, cela implique ensuite un développement autour de $P_{l,k}(\sin \varphi'_0 = 0) \exp j \psi_{mk} \pm \sigma_N$. Les fréquences correspondantes sont :

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_N &= n_1 \dot{\theta} + \dot{\sigma}'_N \\ \dot{\psi}_{N,mk}^\pm &= \dot{\psi}_{mk} - (m \mp n_1) \dot{\theta} \pm \dot{\sigma}'_N\end{aligned}$$

Finalement, on adopte la formulation suivante :

$$\begin{aligned}U_{MO} &= 4\pi G a_e \rho_w \sum_N \sum_{l=2}^L \left(\frac{a_e}{r'_0}\right)^{l+1} \sum_{k=-l}^{+l} \sum_{m=0}^l P_{lk}(\sin \varphi'_0) d_{lmk}(i) \times \dots \\ &\dots \times \sum_{+}^{-} \left[C_{N,lm}^\pm \mp j S_{N,lm}^\pm \right] \exp j \psi_{km} \pm \sigma_N\end{aligned}\quad (3.28)$$

$$\psi_{N,km}^\pm = \psi_{km} \pm \sigma_N$$

Où ψ_{km} a une forme identique à celle adoptée pour le potentiel de gravité. Les dérivées partielles sont assez proches des dérivées du champ de gravité statique :

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_{MO}}{\partial \varphi'} &= 4\pi G a_e \rho_w \sum_N \sum_{l=2}^L \left(\frac{a_e}{r'_0}\right)^{l+1} \sum_{k=-l}^{+l} \sum_{m=0}^l P'_{lk}(\sin \varphi'_0) d_{lmk}(i) \\ &\times \sum_{+}^{-} \left[C_{N,lm}^\pm \cos \psi_{N,km}^\pm \pm S_{N,lm}^\pm \sin \psi_{N,km}^\pm \right]\end{aligned}\quad (3.29)$$

et deux autres dérivées partielles sont :

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_{MO}}{\partial r'} &= -4\pi G a_e \rho_w \frac{(l+1)}{r'_0} \sum_N \sum_{l=2}^L \left(\frac{a_e}{r'_0}\right)^{l+1} \sum_{k=-l}^{+l} \sum_{m=0}^l P_{lk}(\sin \varphi'_0) d_{lmk}(i) \\ &\times \sum_{+}^{-} \left[C_{N,lm}^\pm \cos \psi_{N,km}^\pm \pm S_{N,lm}^\pm \sin \psi_{N,km}^\pm \right]\end{aligned}\quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{MO}}{\partial \lambda'} = & \dot{\psi}_{N,km}^{\pm} 4\pi G a_e \rho_w \sum_N \sum_{l=2}^L \left(\frac{a_e}{r_0'} \right)^{l+1} \sum_{k=-l}^{+l} \sum_{m=0}^l P_{lk}(\sin \varphi_0') d_{lmk}(i) \\ & \times \sum_{+}^{-} \left[C_{N,lm}^{\pm} \cos \psi_{N,km}^{\pm} \pm S_{N,lm}^{\pm} \sin \psi_{N,km}^{\pm} \right] \quad (3.31) \end{aligned}$$

3.1.3 Théorie de Kaula

Nous faisons ci-dessous un court rappel sur la théorie [Kaula \(1966\)](#), qui utilise des éléments orbitaux képlériens classiques, dans le cadre d'une approche lagrangienne. $E = \{a, e, i, \Omega, \omega, M\}$: en eux-mêmes, ils représentent la solution elliptique non perturbée, dans les équations perturbatives de Lagrange :

- Éléments caractérisant la géométrie de l'ellipse :
 - a , demi grand axe de l'ellipse
 - e , excentricité
- Éléments positionnant le plan de l'orbite dans l'espace :
 - i , inclinaison du plan de l'orbite sur le plan de référence
 - Ω , longitude du nœud ascendant
- Éléments repérant la position du corps sur son orbite :
 - \bar{n} , moyen mouvement
 - ω , argument du péricentre (*joue le rôle de position initiale*)

Dans ce cas, les éléments définis précédemment subissent des variations au cours du temps, et ces variations sont régies par les équations planétaires de Lagrange données en Annexe ; M désigne l'anomalie moyenne qui vérifie : $M(t) = M(t_0) + \bar{n}(t - t_0)$.

Champ de gravité. La première étape de la transformation de U^* dans les éléments consiste à exprimer les angles des coordonnées sphériques en fonction des angles qui repèrent "géométriquement" l'orbite dans l'espace : l'inclinaison i , l'argument du nœud Ω , la position du périée ω , et l'anomalie vraie v . Ceci permet d'introduire les fonctions d'inclinaison $F_{l,m,p}(i)$ dont on peut trouver une expression explicite dans [Kaula \(1966\)](#).

La deuxième étape de la transformation nécessite de prendre en compte les termes en (a, e, r, v, M) , ce qui introduit les fonctions $G_{l,p,q}(e)$ de l'excentricité. En combinant les deux types de fonctions

d'inclinaison et d'excentricité, on aboutit à :

$$U_{l,m} = \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^l \sum_{p=0}^l F_{l,m,p}(i) \sum_{q=-\infty}^{+\infty} G_{l,p,q}(e) \times \left(\left[\begin{array}{c} C_{l,m} \\ -S_{l,m} \end{array} \right]_{(l-m)_{\text{pair}}}^{(l-m)_{\text{pair}}} \cos \psi_{l,m,p,q} + \left[\begin{array}{c} S_{l,m} \\ C_{l,m} \end{array} \right]_{(l-m)_{\text{impair}}}^{(l-m)_{\text{pair}}} \sin \psi_{l,m,p,q} \right) \quad (3.32)$$

avec θ l'angle sidéral de la Terre :

$$\psi_{l,m,p,q} = (l - 2p + q)M + (l - 2p)\omega + m(\Omega - \theta) \quad (3.33)$$

Une intégration des équations permet d'identifier la signature de chacun des coefficients (les jeux l, m, p, q) intervenant dans l'expression du potentiel perturbateur ce qui permet, ensuite, de les déterminer par méthode inverse. Pour plus de généralité, et bien que nos analyses d'erreurs portent en majorité sur les mouvement orbitaux quasi-circulaires, nous avons repris et codé cette théorie, en identifiant les amplitudes et périodes des perturbations (courtes, moyennes, longues périodes et effets séculaires sur les angles) grâce aux fréquences des jeux : $\dot{\psi}_{lmpq} = (l - 2p + q)\dot{M} + (l - 2p)\dot{\omega} + m(\dot{\Omega} - \dot{\theta})$.

Champ de pression de radiation solaire. Nous avons utilisé le principe du développement de Kaula, afin de construire une solution analytique dans le cas de la perturbation de pression solaire, considérée comme un champ (sans effet de l'ombre, complexe à modéliser, e.g. Ferraz-Mello).

De même que dans le cas de la théorie circulaire, nous développons, l'effet de pression de radiation solaire, sous la forme d'un potentiel de l'équation 3.24 :

$$\begin{aligned} U_{PR} &= -\sigma r P_{1,0}(\cos \Psi) \\ \cos \Psi &= \sin \varphi \sin \varphi_{\odot} + \cos \varphi \cos \varphi_{\odot} \cos(\alpha_{\odot} - \lambda) \end{aligned}$$

Avec :

$\sigma = c_R \frac{A}{m} p_{SR}$: le coefficient de la pression de radiation, décrit dans la section sur la théorie circulaire.

(r, φ, λ) : les coordonnées sphériques du satellite par rapport à l'équateur terrestre,

$(\varphi_{\odot}, \alpha_{\odot})$: les coordonnées angulaires du Soleil dans l'équateur terrestre.

On écrit, comme précédemment, $P_{1,0}(\cos \Psi)$ mais en utilisant ici les variables $(a, e, i, \Omega, \omega, M)$ et les fonctions de Kaula de l'inclinaison et d'excentricité (cf. le développement du champ ci-dessus). On est cependant dans les cas $l = 1$ et $m = 0, 1$; le potentiel se résume à quelques termes, et en

posant $r = a.(r/a)$:

$$U_{PR} = -\sigma a \sum_{m,p,p'} F_{1mp}(i) F_{1mp'}(\varepsilon_{\odot}) \sum_q H_{1pq}(e) G_{1p'q'}(e_{\odot}) \exp^{j(1-2p+q)M+(1-2p)\omega+m\Omega-(1-2p')(\omega+M)_{\odot}}$$

L'idée est de prendre en compte les termes venant des coordonnées du Soleil comme ceux du satellite ; on aboutit alors à une double formulation de Kaula, pour les deux corps. Le potentiel de référence donné ci-dessus est développé pour $l - 2p' + q' = 0$, donc sans considérer les termes en e_{\odot} (erreur relative $< 10^{-3}$) ; le principe du calcul de la solution est conforme à Kaula, avec les équations de Lagrange d'une part et les expressions des dérivées partielles de U_{PR} d'autre part (voir Annexe).

Marées océaniques. De la même manière, nous reprenons les expressions des coefficients harmoniques sphériques de marées, décrits dans la section ci-dessus. Cependant, avec Kaula, nous pouvons utiliser les fonctions harmoniques avec les fonctions $F(i)$ et $G(e)$; on obtient :

$$U_{n,lmq}^{MO} = 4\pi G a_e \rho_w \frac{1+k'_l}{2l+1} \left(\frac{a_e}{a}\right)^{l+1} F_{lm}(i) G_{lm}(e) S_{n,lmq}^{\pm} \quad (3.34)$$

$$S_{n,lmq}^{\pm} = [C_{lm}/-S_{lm}] \cos \Psi_{lmq}^{\pm} + [S_{lm}/C_{lm}] \sin \Psi_{lmq}^{\pm} \text{ suivant parité de } (l-m)$$

$$\Psi_{n,lmq}^{\pm} = (l-2p+q)M + (l-2p)\omega + m(\Omega - \theta) \pm \sigma_n \quad (3.35)$$

Les fréquences correspondantes sont :

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_n &= n_1 \dot{\theta} + \dot{\sigma}'_n \\ \dot{\Psi}_{n,lmq}^{\pm} &= \dot{\Psi}_{lmq} - (m \mp n_1) \dot{\theta} \pm \dot{\sigma}'_n \end{aligned}$$

3.1.4 Conclusion de la dynamique orbitale

Nous avons développé une théorie analytique de satellite, pour des mouvements quasi-circulaires, en nous basant sur les travaux théoriques initiaux de Bois (1992), et sur une première version appliquée aux orbites inclinées et précessantes Exertier and Bonnefond (1997). Le présent travail a consisté à :

1. établir une nouvelle solution du champ de gravité, qui est beaucoup plus stable qu'auparavant aux degrés élevés (en fait pour $l > 30$) en utilisant des récurrences pour calculer les fonctions de l'inclinaison normalisées,
2. rendre plus exacte l'ancienne formulation de la solution analytique
3. étendre la formulation aux champs de pression de radiation et de marées océaniques.

De manière théorique, nous avons proposé d'introduire les termes à courtes périodes dus au coefficient $C_{2,0}$ (cas $l = 2, m = 0, k = \pm 1$ qui est en fait singulier) sur les variables, dont i, Ω qui ne sont pas directement liées aux équations en coordonnées sphériques. Nous avons également proposé d'introduire des couplages entre les variations à longues périodes sur i dues au champ de pression de radiation solaire et les effets séculaires $\dot{\Omega}, \dot{\omega} + \dot{M}$ dus au champ de gravité.

Nous avons également développé un code de propagation analytique d'orbite, et pour rendre notre approche plus générale, nous avons introduit la formulation de [Kaula \(1966\)](#), pour les orbites d'excentricité > 0.003 . Le code est présenté en Annexe. Enfin, nous avons proposé d'établir des tests de contrôle par rapport à une intégration numérique classique en coordonnées rectangulaires. Tout ceci a permis de progresser afin d'obtenir une partie théorique (intégrateur analytique donné à 10^{-3} des perturbations, en relatif) qui doit ensuite s'appliquer (but de notre travail de thèse) à la propagation des erreurs de modèles dynamiques.

3.2 Principe de la propagation d'erreurs

Toute erreur contenue dans le modèle dynamique (gravitationnel ou pas), s'intègre naturellement lors du processus d'intégration des équations du mouvement du satellite. Le principe adopté dans nos travaux est d'utiliser une méthode analytique afin de séparer les signaux qui sont généralement confondus dans les éphémérides ou solutions numériques : la solution analytique d'un côté $x(t)$ et les erreurs $dx(t)$ (inexactitudes et imprécisions) de l'autre. La solution analytique sert alors essentiellement à exprimer, tout d'abord le mouvement lui-même $x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t)$: solution développée à l'ordre un du petit paramètre ε , $x_1(t)$ étant les perturbations. Il s'agit ensuite, avec la même forme analytique, de propager la solution des erreurs $dx(t)$ associées aux inexactitudes de modèle da , avec $da \ll a$. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}
 x &= x_0(t) + \varepsilon x_1(t) \\
 x_1(t) &= f(GM, a/r_0, i, \Omega, (\omega, M \text{ ou } \lambda'_0)) g(a) \\
 g(a) &= g^r(a) + ig^i(a) \\
 &= (C_{l,m} - iS_{l,m}) \exp i\psi_{m,k}
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

où :

- . $f()$: amplitudes des perturbations, qui dépendent des constantes du mouvement.
- . $g(a)$: fonction complexe, linéaire par rapport aux coefficients de modèles dynamiques, géodynamiques ou autres ; par exemple : $a = C/S_{lm}$ du géopotential (nous définirons dCS_{lm} dans la prochaine section).

$$\begin{aligned}
 dx_1(t) &= f(GM, a/r_0, i, \Omega, (\omega, M \text{ ou } \lambda'_0)) \frac{\partial g}{\partial a} da \\
 &= f(GM, \dots) g(da)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial g}{\partial a} da &= g^r(da) + ig^i(da) \\
 g(da) &= (dC_{l,m} - idS_{l,m}) \exp i\psi_{m,k}
 \end{aligned}$$

Cette propagation ou solution des erreurs doit s'accompagner de la trajectoire $x(t)$, puisqu'il faut bien situer $dx(t)$ dans l'espace donc le long de la trajectoire. La précision de cette trajectoire n'est pas alors un problème en soit, puisque les effets des perturbations sur celle-ci n'interviennent qu'à l'ordre deux ; la trajectoire est utilisée pour positionner le résultat de la propagation de $dx(t)$ et pour calculer les dérivées partielles propres aux fonctions de mesures utilisées (distance et vitesse radiale). Nous avons adopté plusieurs types de stratégie pour la trajectoire dite de support :

- la solution analytique elle-même, du premier ordre,

- une solution numérique obtenue par intégration-extrapolation numérique ; ceci permet d’obtenir une trajectoire relativement réaliste sur le long terme (donc sur des périodes de plusieurs jours à quelques mois), car elle peut prendre en compte le champ central, les perturbations de troisième corps (luni-solaires), la pression de radiation solaire directe et le freinage atmosphérique pour les satellites bas < 800 km.
- une éphéméride MOE (Medium Orbit Ephemeris) obtenue par le service SSALTO du CNES dans le cadre des traitements d’orbite précise effectuées notamment pour les missions d’altimétrie satellitaires courantes comme Jason et Saral.

Nous considérons donc ce principe de propagation comme une véritable méthode différentielle : ce n’est pas $[\dot{x}(a + da) - \dot{x}(a)]$ qui est intégré, éventuellement deux fois, ou bien $\partial \dot{x}(a)/\partial a$ comme dans le cas des méthodes numériques. Ici, c’est uniquement $x(da) = dx$, qui est effectivement propagé par la théorie analytique (voir l’outil de propagation d’erreur en Annexe).

Avec les équations de Lagrange, Gauss ou Hill, les auteurs (Balmino, Rosborough, Schrama, etc.) ont calculé des solutions analytiques d’erreurs d’orbite qui sont basées sur des projections depuis les six éléments képlériens vers le vecteur radial-transverse-normal. Les coefficients da (essentiellement ceux du champ de gravité de la Terre, $dC/S_{l,m}$) sont issus des matrices de variance-covariance des modèles.

3.2.1 Les sources d’erreur retenues

On s’intéresse ici aux erreurs de modèles dynamiques, dont l’importance relative varie en fonction de l’altitude des missions spatiales considérées. Il y a en premier lieu les erreurs du modèle de champ, puis pour des satellites comme Jason, les erreurs du modèle de pression de radiation.

Pour le champ de gravité, nous considérons en fait trois types de termes. En premier des inexactitudes sur les coefficients $C/S_{l,m}$, part classique. Ensuite, nous isolons les termes de bas degrés (1 à 2, et ordres 0 à 1) en distinguant des effets sur l’origine du repère en $C_{1,0}, C/S_{1,1}$ (géocentre) et des effets sur l’axe de rotation du repère en $C/S_{2,1}$ (pôle de coordonnées x_p, y_p). Enfin, nous considérons aussi comme source d’inexactitude les amplitudes des coefficients périodiques, annuels et semi-annuels, soit $C_{lm}^{\text{Ann}}, S_{lm}^{\text{Ann}}$. En effet, plusieurs projets ou analyses récents n’ont pas toujours eu accès à ces quantités afin de calculer des orbites précises. Ces coefficients, longtemps étudiés pour les bas degrés du champ (2 à 6 et souvent que à l’ordre 0) ne sont évalués en nombre (50x50) de manière régulière que depuis la mission GRACE (2002) ; ils sont représentatifs des transports de masses hydrologiques (ex : sur figure 3.1). En outre, avec un arrêt toujours possible de ce type de mission spatiale (bien que soit prévue la mission GRACE Follow-On pour 2017), il faudrait soit adopter un modèle moyen, soit proposer des missions récurrentes.

Pour la pression de radiation, nous proposons comme source d’erreur un dépointage limité des panneaux solaires associé à une loi de variation périodique à la période orbitale. Ce type d’erreur a été analysé par plusieurs auteurs sur plusieurs missions spatiales différentes (Jason, GNSS, etc. en

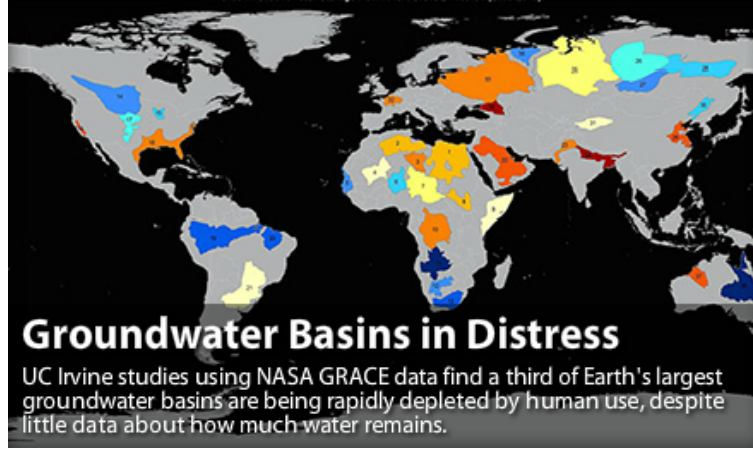


FIGURE 3.1 – Illustration NASA concernant la mission spatiale GRACE Follow-On (voir le site <http://gracefo.jpl.nasa.gov/>).

dehors des satellites géodésiques sphériques, bien entendu). Pour y répondre, les analystes ont mis au point des coefficients de forces dites empiriques afin d'absorber, sur un certain spectre, quelques déficiences ou erreurs de modèle comme : des mauvaises valeurs de la masse, surface, et de loi d'orientation des panneaux, de la réflectivité de chaque sous-surface, etc.

Il semble donc logique de définir ici un modèle d'erreur analytique, a minima. Mais les erreurs dues au mauvais calcul des entrées et sorties d'ombre du satellite, plus délicates à formaliser d'un point de vue analytique, devraient être prises en compte également, ce qui n'est pas le cas ici.

Champ central. Les modèles de champ de gravité courants possèdent une partie fixe et une variable, séculaire et périodique (annuelle et semi-annuelle). Cette dernière peut aussi venir de la succession des champs mensuels ajustés sur les données de GRACE, par rapport à une solution moyenne de référence. On peut donc écrire :

$$U^*(t) = U_{fixe}(T_0) + U_{sec.}(t - T_0) + U_{per.}(t) \quad (3.37)$$

Où :

- $U_{sec.}$ est associé à $\dot{C}_{lm}, \dot{S}_{lm}$.
- $U_{per.}$ est associé à $C_{lm}^{Ann}, S_{lm}^{Ann}$ et $C_{lm}^{Semi-Ann}, S_{lm}^{Semi-Ann}$ aux degré et ordre 50, généralement.

Le modèle de champ U_{fixe} est associé aux coefficients CS_{lm} d'une part ainsi qu'aux erreurs dCS_{lm} . Nous supposons que ces erreurs sont distribuées en inexactitudes bCS_{lm} d'une part et en imprécisions σCS_{lm}^2 (erreurs aléatoires) d'autre part. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} dx_1(t) &= f(GM, \dots)g(da) \\ &= f(GM, \dots) \left[(\tilde{E}C_{l,m} - i\tilde{E}S_{l,m}) \exp i\psi_{m,k} \right] \end{aligned}$$

En principe, nous avons accès à l'inexactitude de l'orbite (partie "moyenne" de l'erreur) ainsi qu'à son imprécision (soit l'écart-type), ces deux composantes dépendant du temps. Concernant la variance, nous pouvons écrire :

$$(dx_1 - E(dx_1))^2 = f(GM, \dots) \left[\left((\tilde{E}C_{l,m} - bC_{lm}) - i(\tilde{E}S_{l,m} - bS_{lm}) \right) \exp i\psi_{m,k} \right]$$

Soit, en prenant l'espérance des deux membres de l'égalité, [Coulot \(2005\)](#) :

$$\text{var}(dx_1) = f(GM, \dots) \left[\left(\text{cov}(\tilde{E}C_{l,m}, \tilde{E}C_{p,q}) - i \text{cov}(\tilde{E}S_{l,m}, \tilde{E}S_{p,q}) \right) \exp i\psi_{m,k} \exp i\psi_{q,r} \right]$$

Si nous disposons d'une matrice de variance-covariance d'un modèle de champ de gravité, nous pouvons donc exprimer l'imprécision sur les composantes de la trajectoire. Ce point a été étudié dans les années 1980-90, notamment par G. Balmino et E. Schrama.

Le point sur lequel nous nous concentrons dans ce travail concerne les inexactitudes. En effet, les auteurs et analystes utilisent souvent les différences d'orbite comme conséquences des améliorations, ou parfois des inexactitudes, entre deux modèles de champ. Utiliser directement la différence des coefficients C/S_{lm} entre deux modèles calculés à la même date, paraît donc justifié et en plus efficace. La propagation analytique donne directement le résultat sur le spectre par les amplitudes et les fréquences associées de chaque jeu, sur l'orbite donc dans le temps et dans l'espace. Il s'agit donc d'une évaluation haute de l'erreur puisque aucune corrélation n'est prise en compte à ce niveau. Il ne s'agit pas d'une propagation de la matrice de variance-covariance du modèle à l'altitude de la mission considérée.

Nous envisageons trois manières de caractériser les erreurs de modèles géodynamiques :

- les variances $\sigma C S_{lm}$ (diagonale de la matrice du modèle ajusté) des coefficients du modèle U^*
- les différences (fixes) entre deux modèles calculés à la même date (t) : $U_1^*(t) - U_2^*(t)$.
- les amplitudes des variations périodiques, annuelles et semi-annuelles, calculées à une date (t) : $U_{per.}(t)$. Ce cas rejoint le précédent, sur les inexactitudes représentées par des différences de modèles. En fait, plusieurs questions se posent, pour les missions altimétriques notamment, de la disponibilité ou non de données de gravité spatiale afin de pouvoir disposer ou non de modèles $U_{per.}$ et de corriger ou pas les trajectoires.

Termes de bas degré. Au degré un, d'après les formules des polynômes de Legendre, $P_1(x) = x$. D'où :

$$U_1 = \frac{G}{r} \iiint_{\mathcal{V}} \frac{r_P}{r} \cos \psi \, dm$$

Dans le cas où le centre du repère de décomposition du modèle choisi n'est pas le centre de masse du corps central, ou qu'il ne peut pas être réalisé avec une précision comparable à celle des mesures, cela entraîne $U_1 \neq 0$. Il faut alors définir les grandeurs $C_{1,0}$, $C_{1,1}$, $S_{1,1}$, grandeurs qui n'interviennent

pas dans le développement général que nous allons établir dans la prochaine section ; ces grandeurs sont reliées directement aux coordonnées du centre de l'origine par (R_0 rayon terrestre équatorial, [IERS 2010])¹ :

$$\begin{cases} R_0 C_{1,1} &= x_G^{\text{Ann}}(t) \\ R_0 S_{1,1} &= y_G^{\text{Ann}}(t) \\ R_0 C_{1,0} &= z_G^{\text{Ann}}(t) \end{cases}$$

où : $(x, y, z)^{\text{Ann}}$ seront les amplitudes de période annuelle de notre signal, compte tenu des effets de transport de masses en surface entre les deux hémisphères, suggérant des effets importants notamment à cette période Wu et al. (2012).

Compte tenu des différentes études publiées (voir Chapitre 2) sur le mouvement du géocentre, et des relations entre repère terrestre et gravité, nous avons choisi de tenir compte de coefficients géodynamiques de degré un de période annuelle. Aucun effet de type géométrique sur les coordonnées des stations de poursuite (effet de charge par exemple) ne sera pris en compte par la suite ; l'idée est de ne pas introduire de confusion.

En ce qui concerne le degré 2, nous proposons de prendre en compte une erreur sur le mouvement du pôle, puisque plusieurs analystes (voir le Chapitre 2) ont envisagé des études sur leur impact dans les calculs. Nous partons des termes $C_{2,1}$ et $S_{2,1}$. Ils sont modifiés par la partie du potentiel centrifuge due à la non colinéarité de l'axe de rotation instantané de la Terre avec le troisième axe du repère [IERS 2010] :

$$\begin{aligned} \Delta C_{2,1} &= + \sqrt{3} C_{2,0} m_1 - C/S_{2,2} \dots \\ \Delta S_{2,1} &= - \sqrt{3} C_{2,0} m_2 - C/S_{2,2} \dots \end{aligned} \quad (3.38)$$

dont la relation des variations (m_1, m_2) aux variables du pôle (x_p, y_p) :

$$\begin{aligned} m_1 &= x_p - \bar{x}_p, & m_2 &= y_p - \bar{y}_p. \\ \bar{x}_p(t) &= \sum_{i=0}^3 (t - t_0)^{i-1} \times \bar{x}_p^i, & \bar{y}_p(t) &= \sum_{i=0}^3 (t - t_0)^{i-1} \times \bar{y}_p^i. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Les erreurs sur les coefficients de degré 2 du champ, sont calculées à partir d'une évaluation empirique de l'erreur sur les paramètres (m_1, m_2) (voir Annexe sur l'Outil de propagation d'erreur d'orbite).

Pression de Radiation Solaire. Enfin, nous considérons aussi les sources d'erreurs dynamiques provenant de la pression de radiation solaire. Cet effet, non conservatif a été retenu par les analystes (voir le Chapitre 2 ; Gobinddass et al. (2009). notamment) essentiellement à cause 1/ du

1. <http://www.iers.org/SharedDocs/Publikationen/EN/IERS/Publications/tn/TechnNote36/tn36.pdf>

problème d'erreur d'alignement des panneaux solaires combinée aux entrées et sorties de la trajectoire dans l'ombre de la Terre et 2/ des coefficients de réflectivité mal estimés. Nous travaillerons essentiellement avec le coefficient σ :

$$\begin{aligned}\sigma &= c_R SM p_{SR} \\ d\sigma &= dc_R SM p_{SR} + c_R dSM p_{SR} \\ dSM &= \delta_f(SM) + \delta_t(SM) \cos(\lambda' + \delta_{ph}(SM))\end{aligned}\tag{3.40}$$

où :

$$SM = \frac{A}{m},$$

les coefficients δ représentent un modèle avec une partie fixe (f) et une variable (t) à la période orbitale phasée (ph).

3.3 Principe du transfert des erreurs

3.3.1 Les “cibles” étudiées

Il faut préciser que la méthode d’analyse d’erreurs envisagée ici est une méthode dite descendante. On modélise essentiellement des erreurs d’orbite afin de les projeter :

- soit en extension géographique sur la Terre (erreurs géographiquement corrélées),
- soit localement à une station au sol (dans son propre repère topocentrique).

Notre méthode n’est donc pas construite pour étudier l’impact des erreurs d’origine géométrique (réseau de stations de poursuite, paramètres de la rotation terrestre, mesures, effets géodynamiques de charges, etc.) sur le calcul d’orbite précis. Mais elle permet de détecter comment les paramètres de la rotation terrestre (leur erreur) se propage dans l’orbite, et comment les coordonnées des stations de poursuite sont-elles “perturbées”.

Aussi, la cible de ces travaux est soit le produit de l’altimétrie satellitaire — la surface topographique de la mer —, qui est directement tributaire de l’erreur d’orbite au spectre complexe, soit le positionnement géocentrique de réseaux de stations au sol. On considérera ici l’erreur d’orbite des satellites Jason (1335 km, et 66 deg. d’inclinaison) et Saral (780 km, 98 deg.), aussi bien dans leur spectre fréquentiel que dans la projection de la composante radiale sur les traces au sol (erreurs géographiquement corrélées, EGC). On considérera aussi la projection des erreurs d’orbite dans le repère de chaque station considérée. Il s’agit d’estimer la conséquence sur l’estimation du positionnement géocentrique, via des observables (distances ou vitesses radiales) sol-satellite. Dans les deux cas, des erreurs de mesures seront ajoutées aux observables qui contiendront donc d’abord les erreurs d’orbite.

Pour cela, nous devons donc projeter les erreurs d’orbite propagées dans le temps par la méthode analytique, sur les fonctions de mesure suivantes : la mesure altimétrique (H), les mesures de poursuite sol-satellite, de distance (ρ) et de vitesse radiale ($\dot{\rho}$). Le calcul du transfert d’erreur est l’objet de la prochaine section. (voir l’outil de calcul en Annexe)

Bien entendu, nous ne devons pas nous écarter des résultats des analyses contemporaines (voir le Chapitre 2) : en amont sur les modèles et en aval sur les produits scientifiques “ciblés”. Il s’agit aussi bien de l’estimation d’erreur de trajectographie, que de l’estimation d’erreur dans l’altimétrie par satellite, ou enfin de l’estimation d’erreur sur les réseaux de poursuite.

3.3.2 Erreurs d’origine dynamique

La propagation analytique nous fournit $dx(t)$ selon les variables du mouvement choisies, avec un pas de une minute parfois moins. Dans un second temps, grâce aux position-vitesse $x, \dot{x}(t)$ du satellite et aux coordonnées X_j des stations j du réseau de poursuite adopté, nous pouvons isoler les passages concernés puis estimer les observables (distance ou vitesse radiale).

Le but est d'estimer aussi les dérivées partielles de l'observable O (voir prochaine section), afin de calculer le transfert de $dR, dT, dN(t)$ vers $dO(t)$.

3.3.3 Erreurs d'origine géométrique

Il est logique et plus réaliste d'ajouter aux erreurs d'orbite $dx(t)$, des erreurs de mesure en identifiant bruits et biais instrumentaux. Nous décrivons les valeurs retenues par type de mesure, en s'appuyant sur les études et bilans d'erreurs menés par les analystes et les instrumentalistes (voir le Chapitre 2). Nous ne traitons pas du cas des mesures GNSS, qui font intervenir plusieurs satellites pendant un temps court, ce qui n'est pas l'architecture adoptée ici : un satellite par passage, puis le cumul des passages par station sur une période raisonnable, de 7 jours en moyenne (voir les solutions IDS et ILRS).

Mesures de distance sol-satellite. Notre cible d'analyse, dans ce cas présent, est le repère mondial des stations laser. Nous nous intéressons donc aux mesures de distances et aux sources principales de bruits et biais. Nous avons distingué trois sources (cf. séminaire GRGS de Sorèze, C. Courde, 2015) :

- les bruits venant des détecteurs, réflecteurs, et lasers utilisés (ceux-ci sont caractérisés pour chaque station laser, grâce aux informations venant de l'ILRS)
- les biais ou systématismes, tels que ceux détectés par les centre d'analyse (AC) de l'ILRS
- la correction troposphérique ; dans ce cas, nous avons imposé des erreurs de lecture des paramètres météorologiques :
 - la pression (mBar) : dP est de l'ordre de 0.1 mBar
 - la température (Kelvin) : dT est de l'ordre de 0.1 degré
 - le pourcentage d'humidité (%) : dH est de l'ordre de 5-10%
 et nous avons calculé la matrice d'erreurs associée $(dP, 0, 0; 0, dT, 0; 0, 0, dH)^T$

Nous pouvons écrire la distance théorique mesurée par télémétrie laser, comme :

$$\rho_j = |\bar{x} - \bar{X}_j| + d\rho_{tropo} + d\rho_{bruit} + d\rho_{biais}$$

où :

$\rho, d\rho_{source}$: distance et erreur(s) de distance ; ρ sera considéré comme une fonction de \bar{x} et de \bar{X}_j ,

\bar{x} : position du satellite à l'instant (t) ; erreur d'orbite (position) $d\bar{x}$

\bar{X}_j : position de la station j à l'instant (t) ; erreur de position $d\bar{X}$

A partir de :

$$d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial \bar{x}} d\bar{x} + \frac{\partial \rho}{\partial \bar{X}} d\bar{X}$$

Nous déduisons les quantités suivantes, qui sont à la base de la notion de transfert d'erreur :

$$\begin{aligned}\rho'_j = \rho_j + d\rho_{orbite} &= |(\bar{x} + d\bar{x}) - \bar{X}_j| \\ d\rho_{orbite} &= d\bar{x} \cdot \frac{(\bar{x} - \bar{X}_j)}{\rho}\end{aligned}\quad (3.41)$$

$$\begin{aligned}\rho'_j = \rho_j + d\rho_{station} &= |\bar{x} - (\bar{X}_j + d\bar{X}_j)| \\ d\rho_{station} &= -d\bar{X}_j \cdot \frac{(\bar{x} - \bar{X}_j)}{\rho}\end{aligned}\quad (3.42)$$

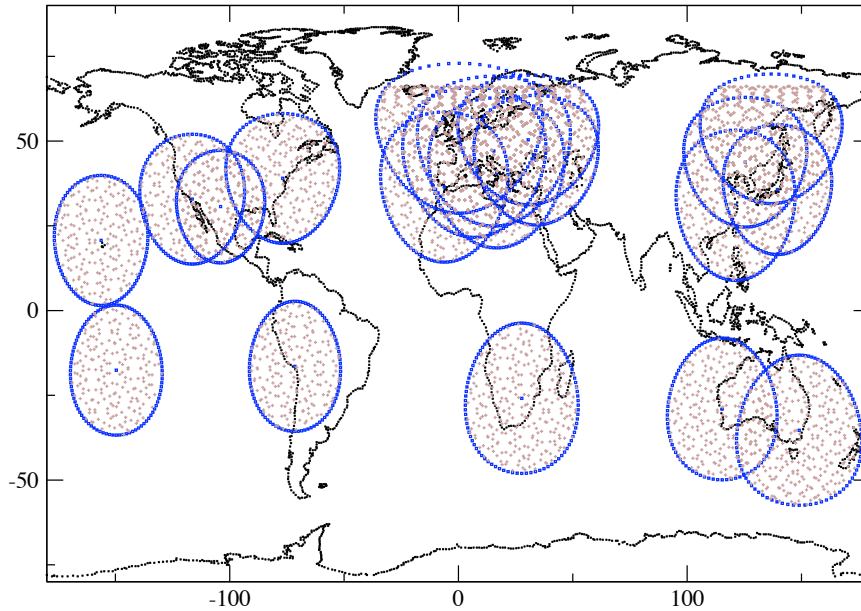


FIGURE 3.2 – Réseau des stations laser de l'ILRS, et traces du satellite Jason-2 toutes les 15 sec., à partir d'une élévation minimale de 20 degrés en station [Pearlman et al. \(2002\)](#).

A partir de la précision actuelle des mesures de poursuite laser, venant de la connaissance des systèmes soit au plan technologique soit au plan des analyses menées en géodésie spatiale, il nous a été possible de rassembler, par station laser, un ensemble de valeurs qui quantifient les erreurs des mesures (voir Annexe sur l'Outil de calcul des transferts d'erreurs). Il y a principalement le taux d'acquisition, la largeur des pulses laser et le bruit du détecteur utilisés.

En résumé, chaque station du réseau laser est différente, en qualité et en quantité de mesures fournies. Nous discutons en Annexe, le calcul du taux de mesures laser prises en compte par passage puis le nombre de passages effectivement sélectionnés par station, selon que celle-ci est très productive ou au contraire assez peu. Le taux est en plus contrôlé par les saisons. Le but est de se rapprocher le plus possible du nombre effectif de données réellement acquises par les stations

laser actuellement (voir site de l'ILRS).

Mesures de vitesse radiale. Le système français DORIS a été développé par le CNES dans les années 80. C'est un système Doppler bi-fréquence, dont l'ensemble du segment technique, automatisé, est à bord du satellite. Contrairement à la télémétrie laser qui nécessite un équipement sol important, le système DORIS consiste en un ensemble de balises (environ 60, bien réparties sur le globe), qui émettent des signaux montants à l'occasion de chaque passage de satellite au-dessus d'une balise émettrice. C'est le décalage en fréquence du signal reçu qui permet de déterminer la vitesse radiale du satellite par rapport à la station émettrice au sol, avec une précision de 0.3 mm.s^{-1} , toutes les 10 secondes.

Nous considérons ici la fréquence de référence de $f_0 = 2 \text{ Ghz}$ Cerri et al. (2010). Nous pouvons écrire le Doppler théorique mesuré par le système DORIS, comme :

$$\dot{\rho}_j = \dot{\bar{x}}(t) \cdot \frac{(\bar{x} - \bar{X}_j)}{\rho} + d\dot{\rho}_{tropo} + d\dot{\rho}_{bruit} + d\dot{\rho}_{biais} \quad (3.43)$$

où :

$\dot{\rho}, d\dot{\rho}$: mesure de vitesse radiale par effet Doppler et ses erreurs

$\dot{\bar{x}}$: vitesse du satellite à l'instant (t) ; erreur d'orbite (vitesse) $d\dot{\bar{x}}$

\bar{X}_j : position de la station j à l'instant (t) ; erreur de position $d\bar{X}$

D'un autre côté, le signal Doppler théorique (sans considération sur la différence de fréquence bord-sol) peut s'exprimer comme :

$$f_{\text{Doppler}} = f_D = -f_0 \frac{\dot{\rho}}{c}$$

D'après Willis et al. (2004), la relation d'erreur vitesse-fréquence s'établit comme :

$$\begin{aligned} (f_D + \Delta f) + f \frac{\dot{\rho}}{c} &= f_D + f \frac{\dot{\rho} + d\dot{\rho}}{c} \\ \Delta f &= f \frac{d\dot{\rho}}{c} \end{aligned} \quad (3.44)$$

Ceci donne la correspondance approchée de 0.3 mm.s^{-1} pour un décalage relatif de fréquence de 10^{-12} . Ensuite avec les dérivées partielles, qui sont à la base de la notion de transfert d'erreur :

$$\begin{aligned} d\dot{\rho} &= \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \bar{x}} d\bar{x} + \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \dot{\bar{x}}} d\dot{\bar{x}} + \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \bar{X}} d\bar{X} \\ \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \bar{x}} &= \frac{\dot{\bar{x}}}{\rho} - \frac{\dot{\bar{x}} \cdot (\bar{x} - \bar{X})}{\rho^2} \frac{(\bar{x} - \bar{X})}{\rho} \\ \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \dot{\bar{x}}} &= \frac{(\bar{x} - \bar{X})}{\rho} \end{aligned}$$

Nous déduisons les quantités suivantes :

$$\begin{aligned}\dot{\rho}'_j &= \dot{\rho}_j + d\dot{\rho}_{orbite} = (\dot{x}(t) + d\dot{x}) \cdot \frac{(\bar{x} + d\bar{x} - \bar{X}_j)}{\rho} \\ d\dot{\rho}_{orbite} &= \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \bar{x}} \cdot d\bar{x} + \frac{(\bar{x} - \bar{X}_j)}{\rho} \cdot d\dot{x}\end{aligned}\quad (3.45)$$

$$\begin{aligned}\dot{\rho}'_j &= \dot{\rho}_j + d\dot{\rho}_{station} = \dot{x}(t) \cdot \frac{(\bar{x} - (\bar{X}_j + d\bar{X}_j))}{\rho} \\ d\dot{\rho}_{station} &= -\frac{\dot{x}}{\rho} + \frac{\dot{x} \cdot (\bar{x} - \bar{X})}{\rho^2} \frac{(\bar{x} - \bar{X})}{\rho}\end{aligned}\quad (3.46)$$

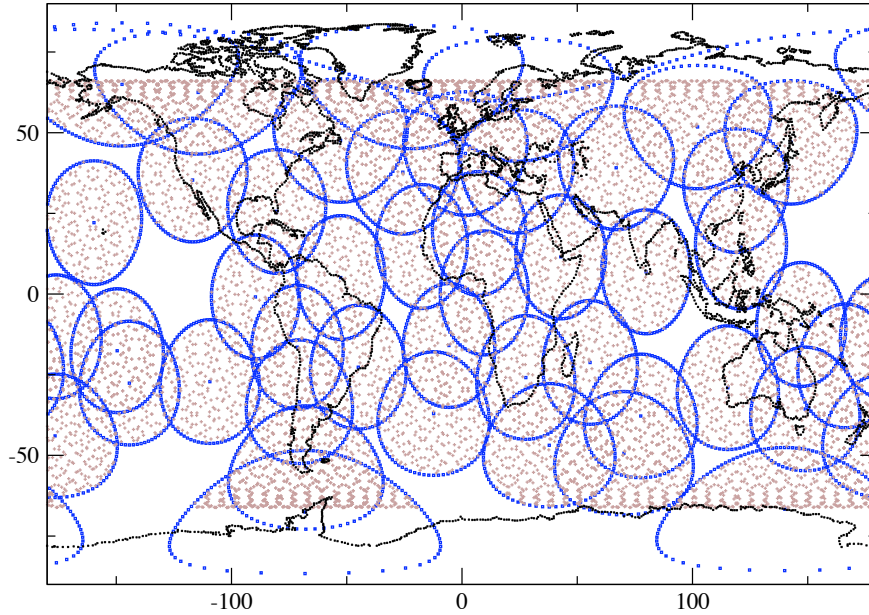


FIGURE 3.3 – Réseau de stations DORIS de l’IDS, et traces du satellite Jason-2 toutes les 10 sec., à partir d’une élévation minimale de 20 degrés en station [Tavernier et al. \(2005\)](#).

Nous n’utilisons pas de biais de fréquence (ici $d\dot{\rho}_{biais}$), et nous prenons un bruit de mesure général, toutes stations confondues, de 0.2 mm.s^{-1} (selon [Jayles et al. \(2015\)](#)). En outre, nous supposons une erreur d’ajustement du biais troposphérique Doppler par passage de l’ordre de $< 1 \text{ cm}$ (aléatoire, voir [Willis et al. \(2013\)](#)), qui est transmis à la mesure $\dot{\rho}$; ceci est calculé à l’aide de la dérivée partielle $\partial \dot{\rho} / \partial \rho$. Précisons qu’en dehors d’appoints aux coordonnées géocentriques de chaque station du réseau de poursuite ajustés sur la période considérée de 7 jours, aucun autre paramètre n’est ajusté.

Enfin, contrairement au laser, nous n’avons pas de sélection spécifique des données ou de

différence entre les stations du réseau Doppler DORIS considéré. Nous prenons simplement statistiquement 85% des données théoriques à 10 secondes.

Chapitre 4

Applications des méthodes développées

Sommaire

4.1	Origines des erreurs d'orbite	56
4.1.1	Champ de gravité	56
4.1.2	Pression de radiation solaire directe	60
4.2	Propagation des erreurs d'orbite	61
4.2.1	Trajectoires et spectres d'erreurs	61
4.3	Extension géographique de l'erreur radiale d'orbite	65
4.3.1	Différences de modèles	65
4.3.2	Variations périodiques	66
4.3.3	Modèles variables dans le temps	66
4.3.4	Géocentre et pôle	69
4.3.5	Coefficients C/S_{31}	70
4.3.6	Conclusion	72
4.4	Propagation des erreurs dans le repère	73
4.4.1	Cas de Jason-2 (DORIS et laser)	73
4.4.2	Cas de LAGEOS (laser)	79
4.4.3	Conclusion	83

Dans le Chapitre 2 précédant, nous avons présenté l'état des recherches en géodésie dynamique, essentiellement les articles et présentations récents concernant l'estimation d'erreurs d'orbites et ses effets en altimétrie satellitaire et sur le repère de référence terrestre (laser et DORIS). Nous avons proposé au Chapitre 3 une méthode de propagation des erreurs basée sur une théorie analytique et sur quelques principes d'estimation des transferts d'erreurs vers les observables sol-satellite :

d'altimétrie, de distance et de vitesse radiale. La théorie nous permet de modéliser les perturbations (calcul d'orbite analytique) et de propager les erreurs d'orbite venant des erreurs dans les modèles.

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats de la propagation des erreurs d'orbite : les projections des quantités, soit en terme d'extension géographique soit sur les positions des stations au sol. Notons qu'il est difficile d'adopter une formulation unique pour décrire toutes les situations envisagées ici ; nous avons choisi le terme "erreur d'orbite" dans tous les cas ou presque. Or, pour caractériser des incertitudes sur les modèles de champ de gravité, nous estimons aussi bien des différences de modèles, des termes périodiques ou encore des termes individuels. Dans tous les cas, il s'agit de très petites quantités. Mais il faut cependant retenir ce point, comme étant une limitation de la méthode.

4.1 Origines des erreurs d'orbite

Nous avons vu au Chapitre 2 qu'un certain nombre d'auteurs ont publié récemment des comparaisons : d'orbite, d'erreurs géographiquement corrélées, d'analyses de réseaux de stations de poursuite (coordonnées, mouvement du géocentre et/ou paramètres de transformation globale). La source des incertitudes vient principalement de la qualité de l'orbite, même si la couverture joue un jeu important ainsi aussi que la nature et la précision des données de poursuite : Doppler ou télémétrie.

4.1.1 Champ de gravité

Nous avons vu qu'il est difficile d'obtenir une formulation unique pour représenter les variations plus ou moins rapides du champ de gravité de la Terre (voir le Chapitre 2). Tous les modèles présentés ne permettent pas de décrire la même orbitographie. Plusieurs coefficients géodynamiques des harmoniques du champ sont en désaccord, notamment aux degrés 1 (géocentre), et 3 (ordre 1). Enfin, les modèles ne manipulent pas toujours les mêmes types de coefficients variables (séculaires et/ou périodiques à des degrés différents), ce qui rend difficiles leur utilisation et les comparaisons.

Par exemples, les modèles EIGEN-GRGS (versions Mean Field ou pas) tout comme le modèle EIGEN-6S comportent des coefficients $(\dot{C}/\dot{S})_{lm}$ séculaires (degrés 2 à 50) et des coefficients périodiques $(C^{\text{per}}/S^{\text{per}})_{lm}$ annuels et semi-annuels (degrés 2 à 50). Les modèles EIGEN-5C et AIUB-GRACE03S ne comportent que des coefficients séculaires (degrés 2 à 4 et 2 à 30, respectivement).

La propagation analytique des erreurs d'orbite dues à des incertitudes de modèle, et leurs projections notamment en termes d'erreurs géographiquement corrélées restent l'objectif de ce travail. Nous verrons dans la prochaine section qu'à cause de la complexité des transferts d'erreurs avec des trajectoires comme Jason-2 et Saral, les conséquences peuvent être identifiées de manière indépendante des grandes analyses grâce à notre approche analytique.

Illustrations des incertitudes de modèles

Afin d'identifier les signatures “géophysiques”, nous présentons tout d'abord quelques cartes globales : des différences de modèles en terme de hauteurs de géoïde. Ces figures nous permettent de constater (et de contrôler le code) la présence de signaux géodynamiques en amplitude et en répartition géographique.

Différences de modèles. Un moyen efficace pour effectuer des analyses d'erreurs en orbitographie est la comparaison des orbites obtenues à partir de modèles différents. Ici, nous utilisons des modèles publiés récemment (voir Table 4.1), dont les coefficients sont calculés à la même date.

Les cartes (figure 4.1) nous donnent une vision globale de la différence des modèles : EIGEN-GRGS.RL02MEAN-FIELD moins EIGEN-6S ou bien moins EIGEN-5C. On constate essentiellement des signatures au niveau de ± 2 cm dans les régions d'Amazonie, d'Alaska et de Groenland.

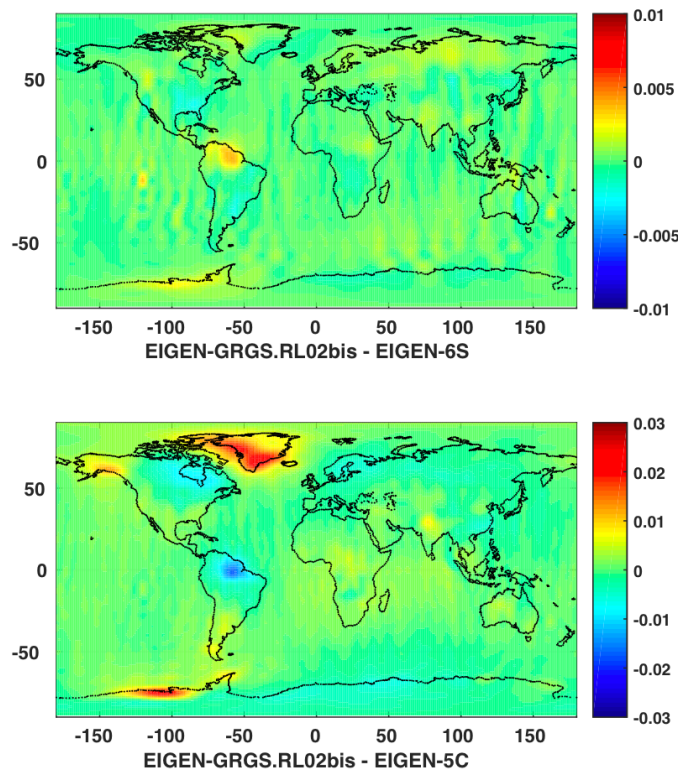


FIGURE 4.1 – Illustration des différences de modèles (aux degrés et ordres 2 à 50), en terme de hauteur de géoïde (en m).

Variations périodiques. L'impact des variations périodiques (annuelles et semi-annuelles) est intéressant pour l'analyse d'erreurs d'orbite. Nous regardons ici leurs signatures sur le géoïde. Nous considérons la partie variable périodique U^{per} du modèle EIGEN-GRGS.RL02MF (MEAN-FIELD) qui est calculée pendant 6 mois.

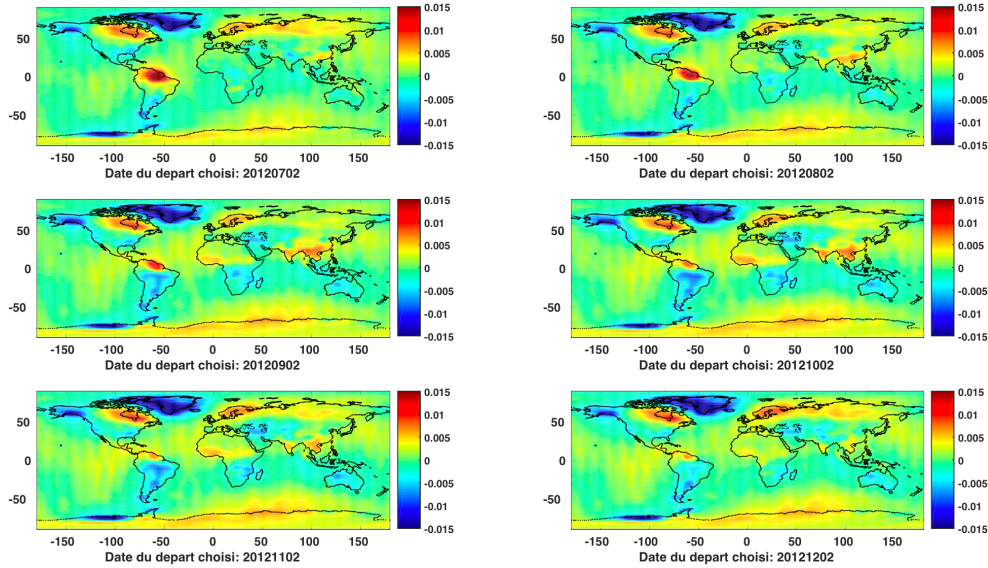


FIGURE 4.2 – Illustration des variations périodiques du modèle EIGEN-GRGS.RL02MF, du 02 Jul 2012 au 02 Déc 2012, en terme de hauteur de géoïde (en m).

La figure (4.2) est la séquence des cartes de hauteur de géoïde du 02 Juillet 2012 au 02 Décembre 2012. Elles montrent les effets de la partie variable périodique de ± 1.5 cm et le déplacement des effets dans les régions d’Amazonie et d’Asie.

Modèles variables dans le temps. Grâce à la contribution des missions spatiales, il existe maintenant des champs mensuels voire hebdomadaires. Ceci nous permet de considérer l’impact de la variation de ces solutions dans le temps. Dans notre contexte, nous avons utilisé la succession des champs mensuels ajustés sur les données de GRACE¹.

Suivons la figure (4.3) de gauche à droite et de haut en bas (sauf la carte en bas à droite). Nous avons des cartes de hauteur due à la différence des champs mensuels de Août 2012 à Janvier 2013 (sans Octobre 2012 à cause du manque de données) par rapport à Juillet 2012. Elle nous fournit le changement (de ± 1 cm) et le déplacement des effets autour de l’équateur pendant 6 mois (Juillet 2012 à Janvier 2013), qui se concentrent dans les régions d’Amazone et d’Afrique. En comparant les deux cartes 1 & 6, cela nous donne le grand changement de la répartition des effets d’une année à l’autre de Juillet 2012 à Juillet 2013.

Géocentre et pôle. En considérant les influences des phénomènes géophysiques, nous ne pouvons pas ignorer les signatures géodynamiques sur les coefficients harmoniques de degrés un et deux.

Pour illustration, nous montrons sur la figure 4.4 les hauteurs de géoïde avec les quantités suivantes : géocentre ($dT_X = 6.5/dT_Y = 5.5/dT_Z = 7.5$, en mm) et pôle ($dx_p = 6.3/dy_p = 5.8$,

1. <http://grgs.obs-mip.fr/grace/variable-models-grace-lageos/grace-solutions-release-03>

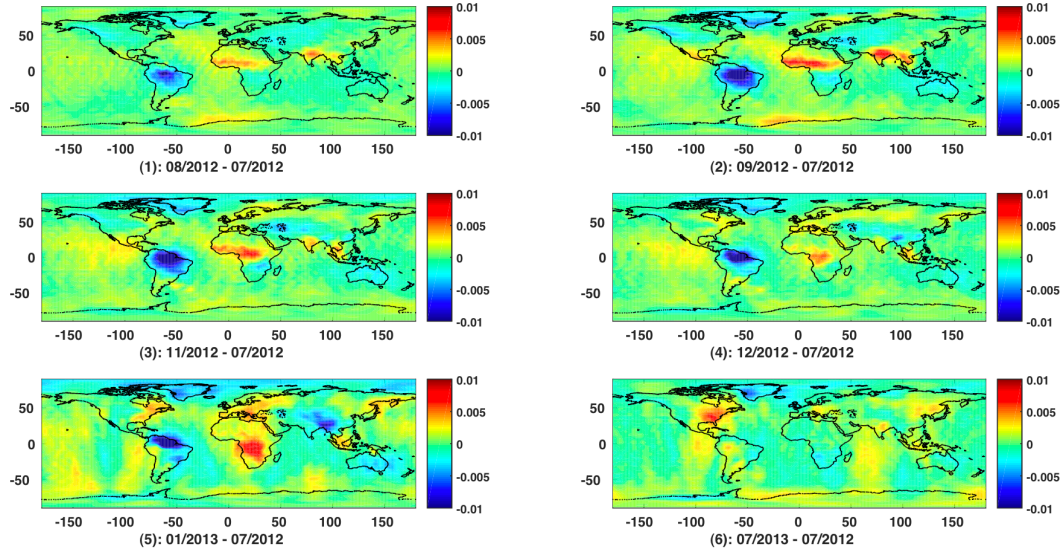


FIGURE 4.3 – Illustration de la variabilité des modèles mensuels EIGEN-GRGS.RL03V1 de Jul 2012 à Jul 2013, de hauteur de géoïde (en m).

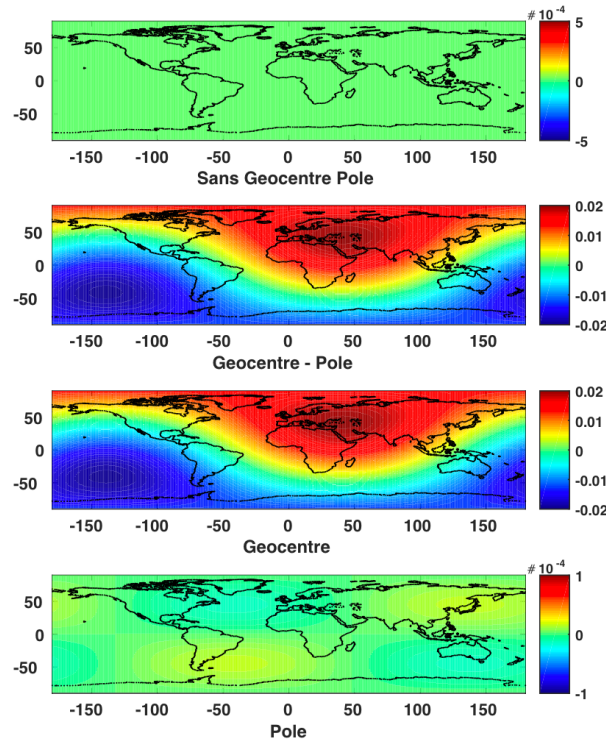


FIGURE 4.4 – Illustration de l'effet de géocentre et de pôle, en terme de hauteur de géoïde (en m) ; le signal injecté dans les coefficients HS de degré un est d'une amplitude totale de 0.012 m ; mais l'échelle de couleurs utilisées a tendance à surdimensionner cette valeur.

en mm). Ces valeurs sont effectivement un peu fortes par rapport aux valeurs utilisées dans les analyses, mais elles permettent de dimensionner notre approche, même si plus loin au niveau des tests, des valeurs plus raisonnables (2-3 mm) sont finalement prises en compte.

Deux cartes en haut sont pour les deux cas : sans aucun effet, puis avec l'effet combiné de géocentre et de pôle. Les deux autres cartes présentent seulement l'effet de géocentre puis celui du pôle. Il est clair que l'influence du géocentre est très forte (en niveau $\pm 1-2$ cm) alors que l'effet du pôle est minime (inférieur au millimètre).

4.1.2 Pression de radiation solaire directe

La pression de radiation solaire directe ne pose pas de problème particulier pour l'orbitographie. Mais l'évaluation numérique des lois d'attitude, et l'estimation des coefficients de réflectivité de chaque partie du satellite (parfois très nombreuses et de forme complexe) engendrent des erreurs de modèle. En plus, les passages successifs de la trajectoire à l'ombre de la Terre impliquent d'estimer correctement la variation très rapide de la force de pression solaire.

Ces erreurs sont en général absorbées par des coefficients empiriques ajustés en cours d'analyse ou d'estimation de l'orbite à partir des mesures de poursuite.

A partir de la littérature existante, nous avons déterminé, empiriquement, des limites au coefficient de réflectivité global comme à l'estimation de la surface exacte du satellite exposée au Soleil. Ceci donne quelques % (1 à 3) sur le coefficient c_R ainsi que sur la surface A (voir Chapitre 3). Nous avons cependant modulé le terme d'erreur dA par la longitude du satellite sur sa trajectoire relativement à la direction du Soleil ; ceci devrait représenter une estimation de l'incertitude (faible) sur la loi d'attitude (cas de Jason-2, mais pas de LAGEOS ni de Saral). Enfin, nous ne prenons pas en compte les passages du satellite à l'ombre de la Terre.

4.2 Propagation des erreurs d'orbite

Dans cette section, nous présentons les résultats de plusieurs propagations d'erreurs d'orbite, puis les transferts d'erreurs intégrées dans plusieurs cas. (voir l'outil en Annexe)

Dans un premier temps, nous évaluons directement le RMS d'erreur d'orbite, venant de l'intégration et de la propagation des incertitudes de modèle : essentiellement les différences statiques, deux à deux entre plusieurs modèles. Nous montrons également quelques spectres analytiques d'erreurs radiales.

Ensuite, nous montrons des erreurs radiales d'orbite propagées par la méthode analytique puis projetées directement de dr' en dH en référence à la mesure altimétrique ; l'approximation (projection) est correcte pour de petites quantités. Il s'agit ici des erreurs moyennes géographiquement corrélées issues de plusieurs cas : différences de modèles, signaux venant de variations périodiques, etc.

Enfin, nous présentons les résultats de la propagation des erreurs converties de $(dr', d\varphi', d\lambda')$ vers les 3 vecteurs (R, T, N) puis projetées dans le repère local de chaque station de poursuite via ses observables. Le principe est d'obtenir la signature de ces erreurs sur les observables considérées (distances ou vitesses radiales) ; une fois assimilées par les mesures de poursuite, nous estimons un appoint (de valeur nulle a priori) sur les coordonnées de chaque station du repère de référence. L'ensemble de ces appoints fournit la base d'une mise en référence du repère, par une transformation de Helmert à 7 paramètres, ce qui permet de donner une idée de la stabilité de l'ensemble.

4.2.1 Trajectoires et spectres d'erreurs

Il résulte de nos analyses et tests d'orbites qu'il peut être délicat, sur 10 jours ou plus, d'utiliser une trajectoire extrapolée par simple intégration. Afin de projeter les erreurs d'orbite sur la carte géographique, et sachant l'importance pour un satellite altimétrique d'utiliser une trace répétitive, nous avons utilisé une trajectoire précise de type MOE pour Jason-2 et Saral provenant des produits SSALTO du CNES.

Les figures (4.5) nous donnent un exemple des traces au sol des satellites considérés dans notre contexte (Jason-2, Saral et Lageos-1 & -2). Nous utilisons la méthode de propagation d'erreurs d'orbite sur des périodes de 10 jours pour Jason-2 afin de couvrir sa période de répétitivité, et de 15 jours pour Saral, malgré une période de 35 jours. Les propagations d'erreurs pour Lageos-1 & -2 sont effectuées sur 7 jours ; pour les analyses effectuées sur un an (voir la Section sur les projections en repère), chaque calcul est indépendant, même si la trajectoire de support est une éphéméride extrapolée de manière continue.

Statistiques globales (RMS). Nous établissons un premier récapitulatif des tests effectués avec l'orbite de Jason-2 dans la Table 4.1. La propagation des erreurs est effectuée avec un pas de

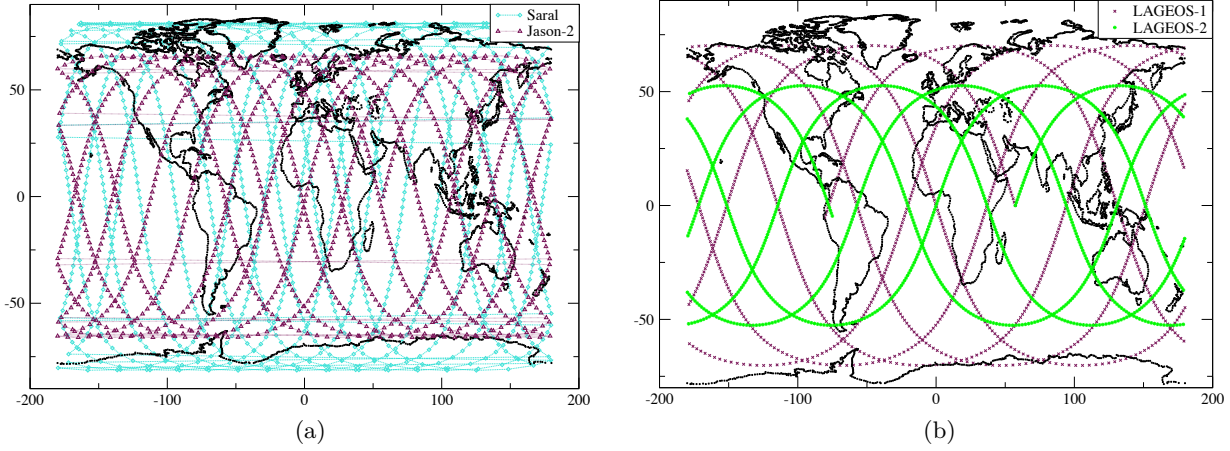


FIGURE 4.5 – Traces au sol, sur une journée, des orbites (a) : **Jason2**-bleu et **Saral**-marron et (b) : **Lageos1**-violet et **Lageos2**-vert.

progression de 1 minute, afin de couvrir la trajectoire avec une résolution raisonnable (env. 360 km le long de la trace). Les RMS (en mm) suivant les trois composantes RTN (en fait dr' , $r'_0 d\varphi'$, $r'_0 d\lambda'$) sont dus : (i) aux différences de modèles avec pour référence EGM-2008, (ii) aux effets périodiques (les coefficients HS 50x50 annuels et semi-annuels). Le niveau de sélection des jeux est $|RTN_{lmk}| > 0.1\text{mm}$.

Référence : EGM-2008	R	T	N	Comment.
Différences				
EGM-96	10.7	234.2	26.0	jeux 2883
EIGEN-RL02bis	11.8	30.0	9.5	341
EIGEN-GL04S	16.2	33.2	9.8	172
EIGEN-GRACE02S	5.1	22.6	13.5	268
EIGEN-5S	14.0	28.4	5.8	145
EIGEN-6S	9.5	27.7	31.1	344
EIGEN-6S–EIGEN-5S	13.1	34.3	7.1	330
idem sans CS_{31}	11.2	31.5	id.	324
Partie périodique				
EIGEN-RL02MF	10.0	25.8	11.0	335
EIGEN-6S	15.7	37.7	15.0	327

TABLE 4.1 – Ecart-types des différences d'orbite (sur les composantes RTN) de Jason-2, en mm, entre les modèles considérés ; sélection des jeux perturbatifs > 0.1 mm.

Ces tests indiquent des différences d'orbite au niveau de 10-15 mm pour le radial R , et de 25-30 mm le long de la trace T , statistiquement ; que ce soient l'amplitude des termes périodiques, annuels et semi-annuels, ou les différences statiques de modèles. On peut comparer ces chiffres aux résultats récents présentés à la conférence internationale OSTST 2015 (Reston, EU), notamment par Jalabert et al. sur les différences entre les orbites GDR-E et GSFC. On constate que nos

RMS sont en accord sur T mais sont 20% trop forts en R ; mais si l'on regarde les résidus laser (données indépendantes), on constate alors un bien meilleur accord sur le radial. Ceci nous amène à l'explication suivante :

comme nous l'avons annoncé au Chapitre 2, l'ajustement d'orbite, qui implique l'utilisation de coefficients empiriques dédiés mais multiples, diminue un peu artificiellement la valeur annoncée de la précision d'orbite via le seul RMS des résidus (observations moins modèle). Le test externe avec des mesures laser d'un sous-groupe choisi de stations doit donc être maintenu.

En fait, les valeurs de la Table 4.1 doivent plutôt être comparées entre elles. Il faut regarder par exemple la différence entre EIGEN-5S et EGM-2008 (14 mm sur R) par rapport à la différence entre EIGEN-6S et EGM-2008 (de 9.5 mm), soit environ 5 mm ce qui est plus réaliste.

Spectres d'erreurs. Le RMS d'orbite même si les méthodes peuvent l'estimer ou le caractériser dans les 3 dimensions de l'espace, reste une information globale. Qu'en est-il de l'information en fréquences ou en périodes ? Les analystes utilisent parfois l'analyse en fréquences appliquée sur les modèles ou sur les résultats (résidus). Notre méthode analytique, pour des question d'organisation des calculs, est construite autour de la notion de jeux d'indices où chaque jeu représente une fréquence donnée.

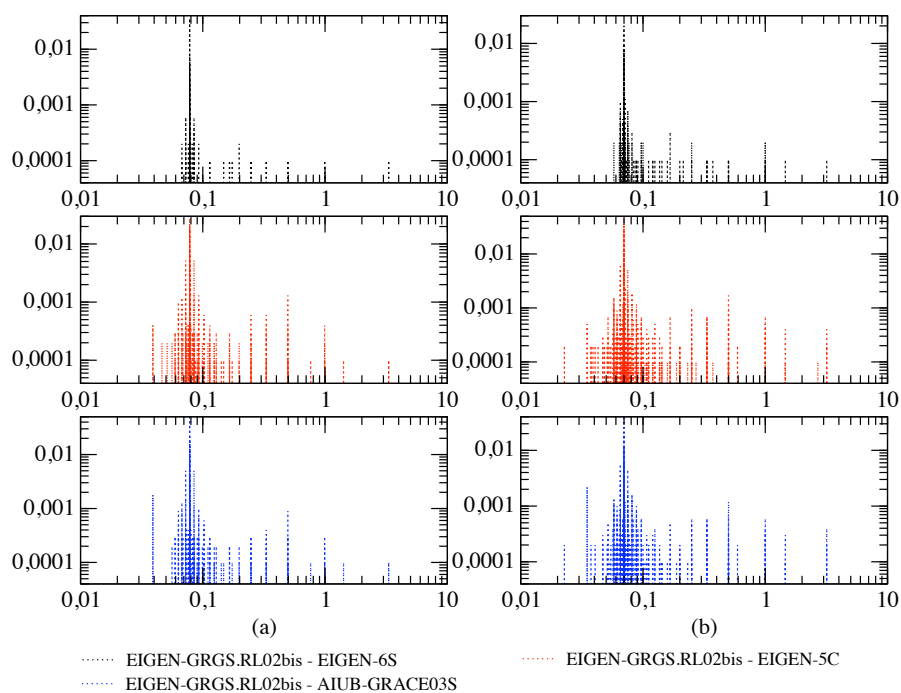


FIGURE 4.6 – Amplitudes (en m) et périodes (en jour) des erreurs d'orbite **Jason-2** (a) et **Saral** (b) provenant des différences de modèles.

La figure (4.6) montre les périodes (en jour) des jeux d'erreur radiale (amplitude en m) obtenus par les différences de modèles ($RTN_{lmk} > 0.1$ mm) : EIGEN-6S (en haut), EIGEN-5C (au milieu)

et AIUB.GRACE03S (en bas) par rapport à EIGEN-GRGS.RL02MF.

Les spectres de Jason-2 (a) et de Saral (b) sont comparables (le nombre de jeux est plus important pour Saral à cause du terme $(a_e/r'_0)^l$). Ils montrent aussi les différents impacts de chaque modèle, relativement. Si EIGEN-6S (solution “satellites”) est donc assez proche de notre référence, la solution précédente (-5C qui combine des données satellites et sol) est un peu plus loin ainsi aussi que la solution AIUB, qui n’est pas de la même “famille” de modèle, tout en utilisant des données GRACE.

Ce qui est préoccupant et que l’on constate grâce à ces spectres, est le nombre important de jeux dont l’amplitude est supérieure à 0.5 mm en R , et dont la période s’éloigne de la période orbitale. En effet, si l’essentiel du signal à cette période peut être absorbé par les méthodes numériques, la multiplicité des périodes empêchent de manière dramatique l’ajustement de termes empiriques pour autant de termes. Enfin, pour l’orbite de Saral, les termes atteignent souvent 1 mm jusqu’à des périodes de quelques jours (les premiers termes résonnants) ; c’est moins le cas avec l’orbite de Jason-2.

Rappelons que nos analyses ont pour but d’identifier les problèmes résiduels contenus dans les modèles, dont la signature dans les produits géodésiques et après assimilation de données est très complexe à extraire. Notre méthode est plus simple de ce point de vue, mais ne peut donc garantir, pour des modèles assez proches, quel est le plus exact.

4.3 Extension géographique de l'erreur radiale d'orbite

Remarque sur l'estimation géographique moyenne des quantités calculées.

Dans l'idée de calcul a priori des erreurs géographiquement corrélées, le développement analytique utilisé par plusieurs auteurs (Rosborough, Balmino, etc.) s'appuie nécessairement sur la période de répétitivité des satellites altimétriques. De ce point de vue, notre technique est hybride avec une méthode d'intégration analytique de l'erreur puis une extrapolation et enfin une représentation numérique & graphique qui va par elle-même décrire les effets géographiques moyens.

4.3.1 Différences de modèles

Nous représentons figure (4.7) les erreurs radiales géographiquement corrélées induites par la différence entre les modèles de champ : EIGEN-GRGS.RL02MF moins EIGEN-6S (en haut) et moins EIGEN-5C (en bas). Ces erreurs correspondent aux inexactitudes maximales de l'orbite : de 2 et 9 mm (RMS) pour Jason-2 sur 10 jours (a) en haut et en bas, et de 3 et 22 mm (RMS) pour Saral sur 15 jours (b) en haut et en bas. Les effets sont donc plus importants pour l'orbite Saral (b) ; son inclinaison et son altitude, très différentes de Jason-2, conduisent à des effets en vagues (figure du haut) que nous n'avons pas pu expliquer pour le moment ; il faudra donc les analyser plus finement. Enfin, nous avons effectué un test sur Saral à 15 jours et à 35 j (véritable période de répétitivité du satellite) ; les erreurs géographiquement corrélées (leur répartition géographique) sont inchangées et le RMS varie de 0.1 mm.

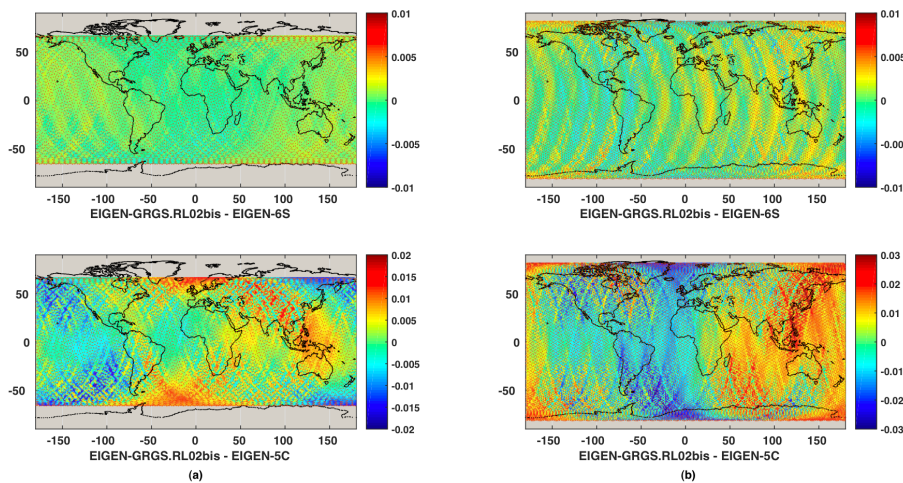


FIGURE 4.7 – Erreurs radiales géographiquement corrélées (en m) pour **Jason-2** sur 10 jours (a) et **Saral** sur 15 jours (b) dues à la différence de modèle EIGEN-GRGS.RL02MF – EIGEN-6S en haut et – EIGEN-5C en bas. En m ; les échelles en bas sont un peu différentes.

4.3.2 Variations périodiques

Nous regardons ici les effets liés aux variations périodiques, jusqu'aux degré et ordre 50, du modèle EIGEN-GRGS.RL02MF. Les figures (4.8, 4.9) sont les traces au sol des effets radiaux d'orbite Jason-2 et Saral respectivement. Elles montrent l'évolution lente des déplacements géographiques de ces effets sur la période considérée (6 mois) ; ce qui montre l'effet de cumul proprement lié aux EGC (erreurs géographiquement corrélées).

Contrairement aux différences de modèles qui reproduisent (partiellement) les inexactitudes, il est plus difficile ici de parler d'erreurs radiales d'orbite car les coefficients périodiques peuvent être utilisés par les analystes ou pas, suivant les périodes analysées (calcul d'orbites et altimétrie). Certes les analystes utilisent les meilleures solutions du champ du moment, mais d'une part il y a des différences entre les coefficients périodiques de chaque modèle et d'autre part, ces coefficients ne sont pas valables pour toutes les périodes d'analyse en particulier avant et après les données de la mission GRACE.

Les effets présentés ici, erreurs ou signaux, sont calculés à partir des coefficients périodiques, annuels et semi-annuels, des modèles. Et il est intéressant de mesurer l'amplitude maximale de ces effets sur la composante radiale ; ils sont de ± 12 et ± 20 mm pour Jason-2 et Saral, respectivement. En plus, nous constatons que les structures géographiques sont ici plus complexes que celles des cartes (figure 4.7, (a) et (b) en bas).

Nous nous concentrons donc plus sur les conséquences géographiques des variations temporelles. Celles-ci impliquent un déplacement vers l'ouest ainsi qu'en amplitude. Il faudra, dans l'avenir, calculer les dérives spatio-temporelles géographiques qui se déduisent des variations des EGC et qui serviront donc à améliorer le bilan d'erreur des variations régionales du niveau moyen de la mer (voir Couhert et al. (2015)). Les cartes 4.8 et 4.9 montrent des effets spatio-temporelles, a priori assez faibles.

4.3.3 Modèles variables dans le temps

Pour remédier à la seule utilisation des variations périodiques du modèle moyen EIGEN-GRGS.RL02MF, nous avons suggéré une autre approche. L'idée est de tester avec les modèles mensuels EIGEN-GRGS.RL03V1 qui prennent en compte directement des coefficients HS mis à jour chaque mois.

Les résultats de la figure (4.10) donnent maintenant à la fois les conséquences des variations périodiques du champ de gravité sur la composante radiale de l'orbite de Jason-2 (pendant un mois, six mois, et un an, de Jul 2012 à Jan 2013), et les petites instabilités qui viennent de chaque solution mensuelle (ce n'est donc pas un modèle comme dans le cas précédent). La carte montre des effets plus faibles < 10 mm, et la direction d'est en ouest du déplacement des impacts positifs et

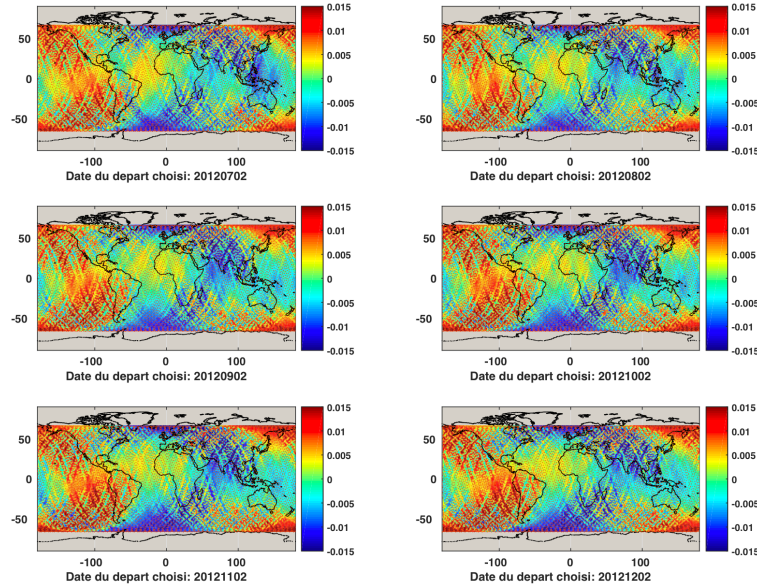


FIGURE 4.8 – Erreurs radiales géographiquement corrélées (en m) pour **Jason-2** sur 10 jours dues aux variations périodiques de EIGEN-GRGS.RL02MF du 02 Jul 2012 au 02 Déc 2012.

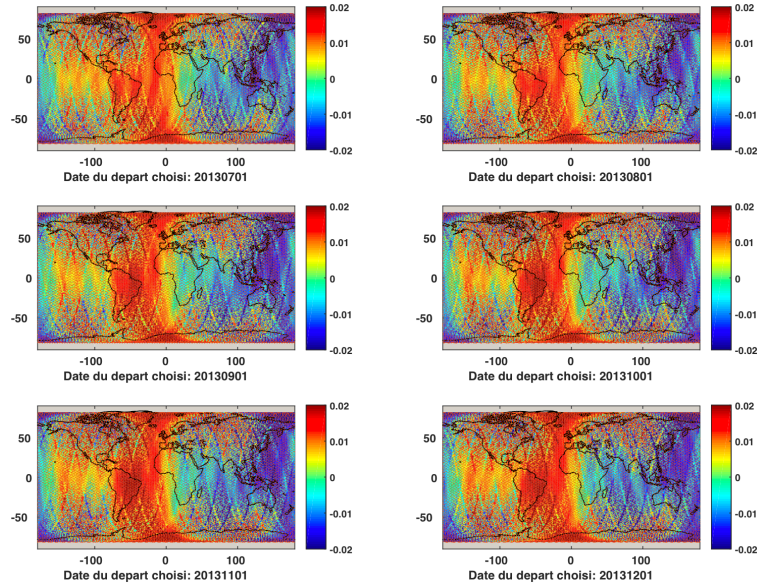


FIGURE 4.9 – Erreurs radiales géographiquement corrélées (en m) pour **Saral** sur 15 jours dues aux variations périodiques de EIGEN-GRGS.RL02MF du 01 Jul 2013 au 01 Déc 2013.

aussi l'augmentation des zones négatives. Il est intéressant de noter la différence annuelle (carte 6) qui indique que les effets semi-annuels, donc plus rapides sont toujours importants. On voit aussi cela dans les cartes (4.11) pour Saral.

Lorsque l'amplitude des impacts est inférieure à 10 mm dans le cas Jason-2, nous avons une séquence des erreurs radiales d'orbite du satellite Saral pendant huit mois consécutifs qui montre

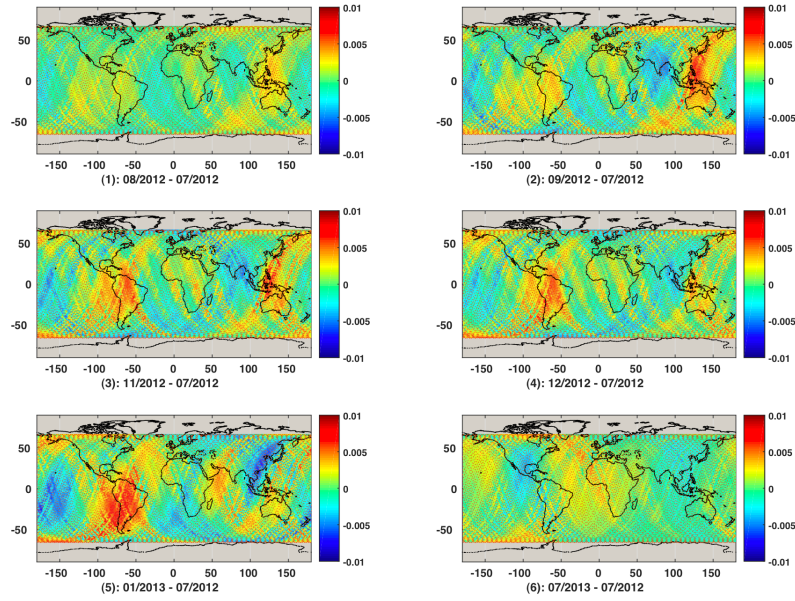


FIGURE 4.10 – Erreurs radiales géographiquement corrélées (en m) dues aux modèles mensuels EIGEN-GRGS.RL03V1 pour **Jason-2** sur 10 jours (Jul 2012 à Jul 2013).

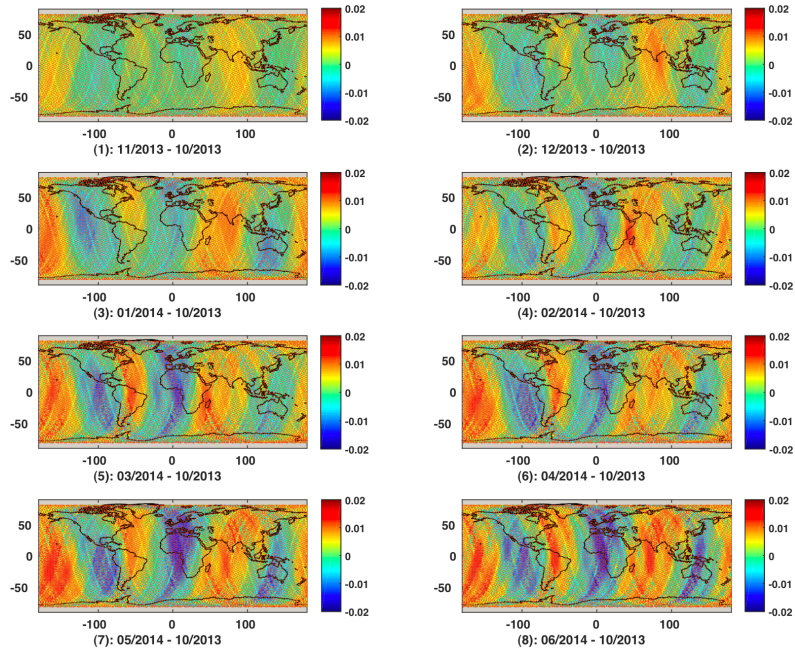


FIGURE 4.11 – Erreurs radiales géographiquement corrélées (en m) dues aux modèles mensuels EIGEN-GRGS.RL03V1 pour **Saral** sur 15 jours (Oct 2013 à Jun 2014).

l'augmentation des effets dans le temps de quelques millimètres à $\pm 10\text{-}20$ mm sur les régions. Précisions que dans ce cas, chaque carte est indépendante des autres ; il n'y a donc pas d'effet de cumul, mais bien un effet "instantané" de chaque modèle mensuel.

4.3.4 Géocentre et pôle

On analyse ici les effets des termes de bas degré ; le phénomène géophysique vient du mouvement du géocentre (d'origine principalement d'hydrologie globale à la période annuelle principalement). Les effets d'erreurs d'orientation du repère sont représentées ici par des appoints aléatoires aux coordonnées du pôle, convertis en coefficients CS_{21} . Dans la section précédente, nous avons analysé l'impact des valeurs adoptées en terme de hauteur de géoïde. Ici, nous avons isolé chaque terme en analysant l'effet sur l'erreur radiale géographiquement corrélée de Jason-2.

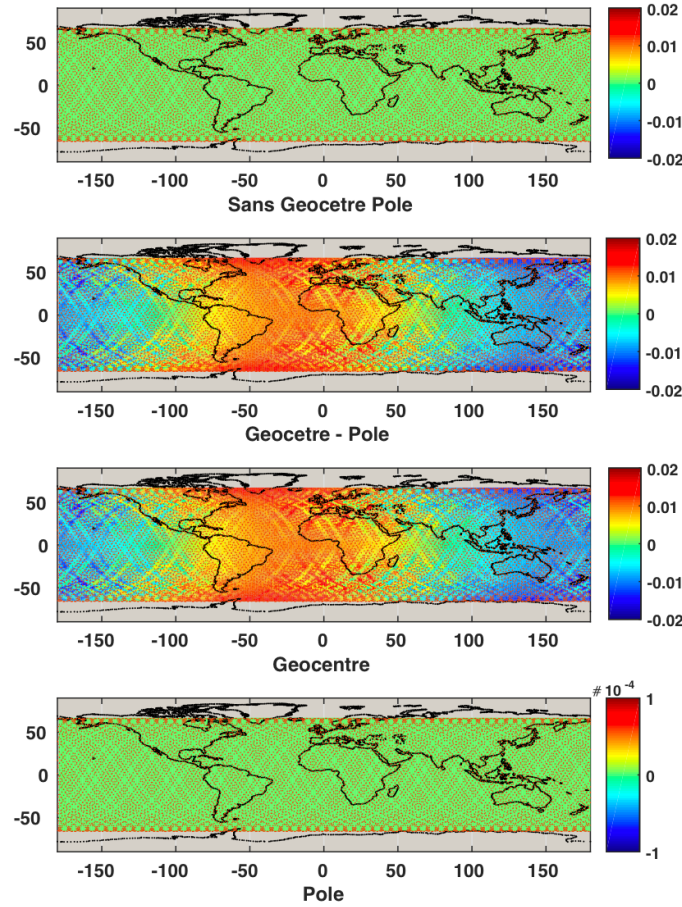


FIGURE 4.12 – Erreurs radiales géographiquement corrélées (en m) dues au géocentre (degré 1) & pôle (degré 2) sur l'orbite **Jason-2**

Les résultats (figure 4.12) montrent l'influence d'un géocentre de composantes 6.5/5.5/7.5 mm sur les composantes $dR/dT/dN$ de l'orbite de Jason-2 au niveau de 4.7/4.6/7.0 mm, respectivement. La signature des erreurs géographiquement corrélées est très différente de celle sur le géoïde ; on constate ici que les erreurs d'orbite sont très sensibles et pratiquement directement proportionnelles aux effets du géocentre.

L'influence d'erreurs (de quelques mm) dans les coordonnées du pôle, donc sur les coefficients CS_{21} ,

est quasi nulle sur l'orbite.

4.3.5 Coefficients C/S_{31}

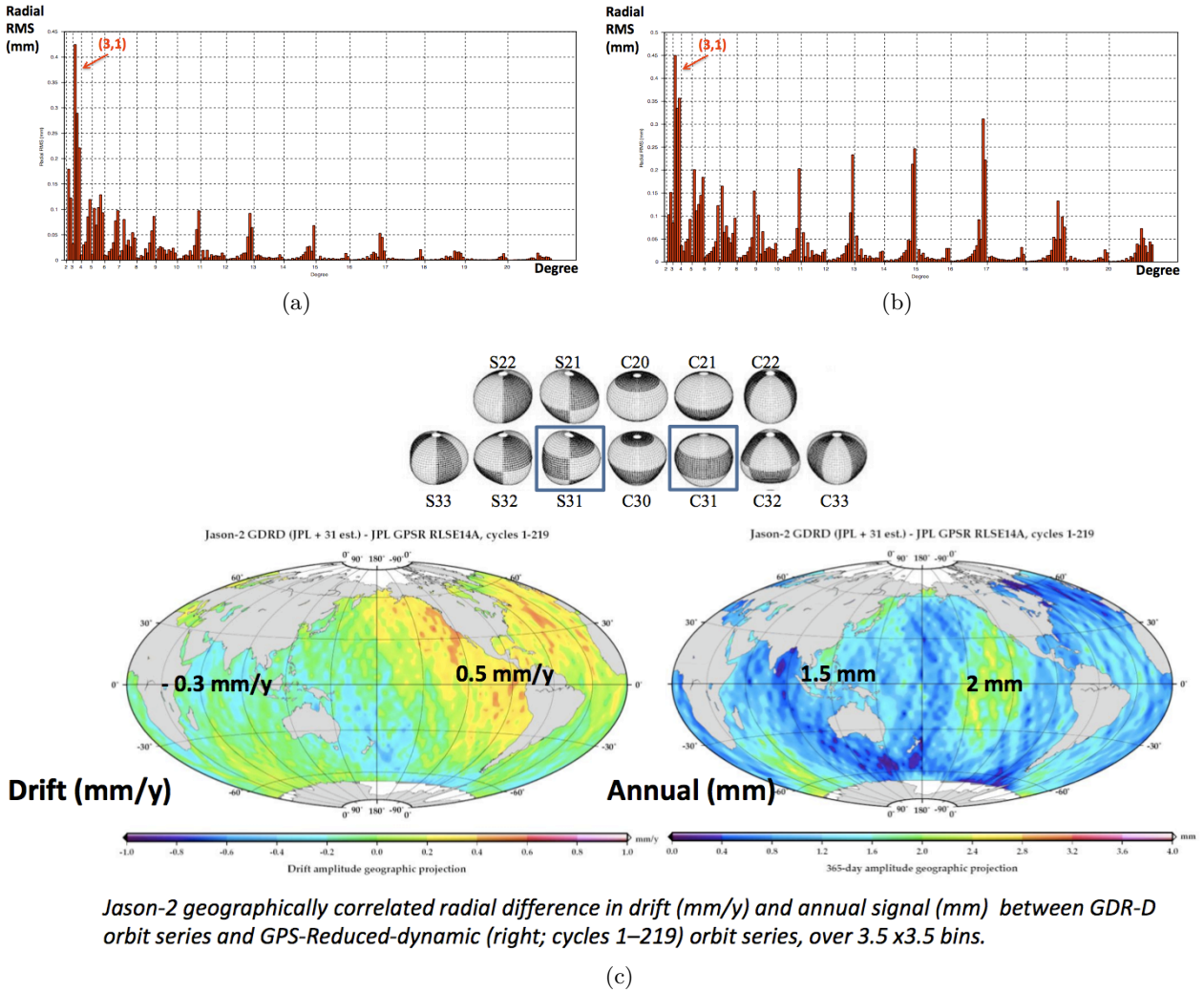


FIGURE 4.13 – Erreurs radiales d'orbite (a) : Jason, (b) : Saral présentées par déviation standard des coefficients HS individuels, et (c) : l'impact des erreurs radiales d'orbite **Jason-2** sur la surface moyenne de la mer, d'après [Couhert et al. \(2014\)](#).

Actuellement la communauté de géodésie spatiale s'intéresse à l'impact des coefficients " C/S_{31} " sur l'orbite des satellites altimétriques. La figure (4.13) présente un exemple de la sensibilité des orbites Jason-2 (spectre en (a), erreur radiale RMS de 0.42 mm) et Saral (spectre en (b), erreur radiale RMS de 0.45 mm) aux coefficients C/S_{31} , d'après [Couhert et al. \(2014\)](#).

La figure illustre (en c) les effets séculaire et annuel, en terme d'erreurs géographiquement corrélées avec Jason-2, où l'auteur a cherché à isoler, dans l'analyse, l'effet des C/S_{31} .

Pour tester l'impact des coefficients C/S_{31} , nous avons calculé deux cartes d'erreurs géographiquement corrélées, avec et sans ces coefficients. Nous avons effectué des tests d'une part basés sur la différence [EIGEN-GRGS.RL02MF – EIGEN-6S], et d'autre part sur [EIGEN-GRGS.RL02MF – EIGEN-5C] ; nous trouvons dans les deux cas un effet radial sur le spectre de l'orbite relativement important par rapport aux autres coefficients C/S_{41} , C/S_{51} , etc. L'amplitude maxi des jeux pour $l = 3, m = 1$ est de 2.4 et 5.8 mm, respectivement.

Nous avons également testé les coefficients périodiques (annuels et semi-annuels, pour $l = 3, m = 1$) provenant des deux modèles EIGEN-GRGS.RL02MF et EIGEN-6S ; là encore l'amplitude maxi des jeux correspondants est de 6 et 7 mm, respectivement.

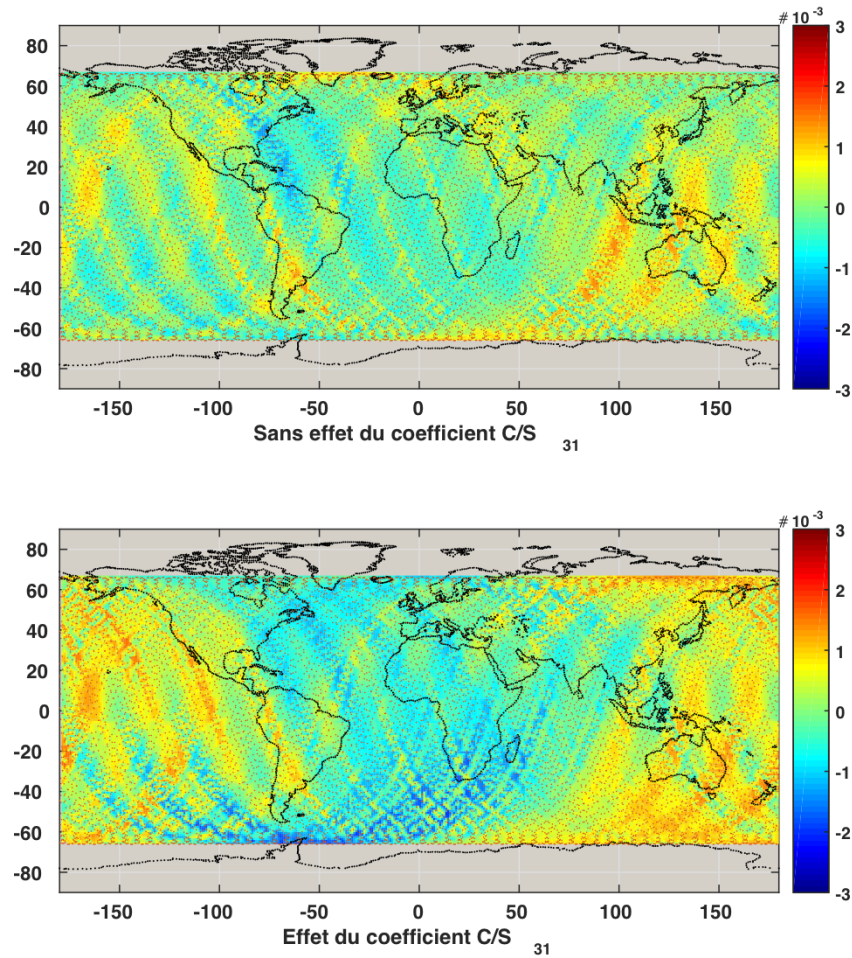


FIGURE 4.14 – Erreurs radiales d'orbite (en m) pour **Jason-2** dues au coefficient C/S_{31} , venant de la différence entre EIGEN-GRGS.RL02.MF et EIGEN-6S (sans et avec C/S_{31} , respectivement)

L'estimation de [Couhert et al. \(2014\)](#) est donc probablement optimiste ; leur amplitude radiale, très faible, est estimée à 0.42 mm (voir spectre figure 4.13). En fait, notre méthode calcule des jeux, pour $l = 3, m = 1$, qui sont distribués sur plusieurs périodes de 38 min à 1427 min ; le jeu maxi est à la période orbitale.

La conséquence de l'impact des coefficients C/S_{31} dans le calcul d'erreurs d'orbite Jason-2, à partir de la différence [EIGEN-GRGS.RL02.MF – EIGEN-6S], est confirmée par les cartes géographiques de la figure (4.14). L'amplitude des jeux (quelques mm) est plus importante que le résultat de Couhert et al. (2014), ce qui peut s'expliquer par l'effet d'absorption des méthodes d'assimilation de données (les jeux sont des effets maximaux). Mais la différence des deux cartes (figure 4.14) montre que l'erreur moyenne géographique reste très petite de l'ordre de 0.5 mm.

4.3.6 Conclusion

Nous avons estimé les erreurs géographiquement corrélées pour les orbites des satellites altimétriques Jason-2 et Saral à partir de la méthode de propagation analytique d'erreur d'orbite. Plusieurs sources d'erreurs, à caractère géodynamique, ont été sélectionnées à partir d'articles récents qui décrivent les liens entre incertitudes de modèles et problèmes résiduels après les analyses (Chapitre 2). Nous avons choisi de tester les différences de modèles, les coefficients périodiques de quelques uns, et aussi quelques coefficients de bas degré (1 à 3).

Les analyses menées récemment concernent d'abord l'orbitographie des deux satellites en versions GDR-D et GDR-E (avec deux versions -E : dynamique et dynamique-réduite). Ces analyses fournissent d'une part une erreur d'orbite radiale de 18 mm pour Saral et de 12-13 mm pour Jason-2 en version dynamique, et < 10 mm en version dynamique-réduite. Les données laser servent soit à calculer l'orbite, avec les données DORIS (voire aussi avec GPS), soit à contrôler de manière indépendante et radiale les orbites DORIS ou DORIS+GPS, avec les passages en haute élévation. Dans ce dernier cas, les résidus laser sont de 8-9 mm pour les deux satellites.

Notre étude est totalement indépendante de ces données ; elle permet d'une part de générer, dans le temps, une erreur d'orbite raisonnable (de 6 à 12 mm, en distinguant les apports de telle ou telle source d'erreur), et d'autre part de propager cette erreur sur la carte, en une erreur moyenne géographiquement corrélée (EGC). Si les erreurs venant des coefficients géodynamiques de bas degrés restent faibles mais avec des signatures clairement identifiées (géocentre et C/S_{31}), les coefficients périodiques imposent une EGC moyenne de 10-12 mm sur Saral et de 6-8 mm sur Jason-2 ; l'EGC annuelle n'a pas été estimée à partir de la variabilité de nos cartes, mais elle reste très faible de l'ordre de 2-3 mm.

Enfin, nous verrons dans la prochaine section que les erreurs d'orbite radiales de Jason-2, propagées par notre méthode et projetées ici en EGC, peuvent être calibrées par des mesures laser bruitées, de haute élévation (> 60 degrés), au niveau de 8 mm, ce qui correspond bien avec ce que les analystes décrivent.

4.4 Propagation des erreurs dans le repère

Le principe de ces tests consiste à *i)* générer du bruit ou des erreurs sur une ou plusieurs origines choisies (mesures, orbite, etc.), *ii)* transférer ces erreurs sur la fonction de mesure distance (distance ou vitesse radiale) station-satellite pour toutes les mesures simulées, *iii)* calculer un appoint sur les coordonnées de chaque station grâce aux dérivées partielles (voir Annexe) et aux moindres carrés, et enfin *iv)* calculer pour l'ensemble des stations une transformation globale dite de Helmert à 7 paramètres : 3 translations, 3 rotations et un facteur d'échelle (sans dimension).

Les appoints sur les coordonnées des stations constituent donc un cumul des erreurs instantanées (mesure, et orbite) projetées sur chaque mesure, pendant la période considérée (soit 7 jours dans tous les cas décrits ci-dessous).

4.4.1 Cas de Jason-2 (DORIS et laser)

La méthode prend en compte la trajectoire de Jason-2 et calcule, avec les dérivées partielles, les projections de chaque type d'erreur choisi (mesure, orbite et repère de référence) sur chaque mesure sol-satellite. La cadence de calcul des observables théoriques pour la télémétrie laser est de 15 sec. (durée des Points Normaux (PN) fixée par l'ILRS) et pour DORIS de 10 sec.

Télémétrie laser. Le bruit de la télémétrie est estimé par station, avec la largeur du pulse laser utilisé et la performance du détecteur (précisions de 30 ps à 150 ps environ) suivant les cas, selon les résultats du projet T2L2. Ensuite, grâce à la cadence des lasers (entre 5 et 1000 Hz) et de la durée du PN, nous calculons le bruit des PN simulés ; de < 1 mm à 9 mm suivant les stations laser ; le plus grand écart est entre la station de Yaragadee (MOBLAS de la NASA) et la station de Golosiiv en Ukraine. Nous ajoutons un bruit de propagation atmosphérique à tous les passages, en tenant compte d'erreurs réalistes sur la mesure des paramètres météo de pression, température et humidité (soit 0.1 mB, 0.1 K, et 5%).

Nous avons choisi de faire un tri statistique qui limite le nombre de données théoriques à un taux d'acquisition qui est fixé à l'avance, par station. Par exemples, nous avons choisi un taux de 65% pour Yaragadee, et de 35% pour Golosiiv. Le nombre de passages disponibles par station est également sélectionné selon un critère équivalent, fixé par station. Ainsi, sur 7 jours avec Jason-2, le nombre de PN par station va de 500 à < 100 .

Nous avons mis au point un triple test avec le laser (voir Table 4.2), afin de mesurer le dimensionnement (choix des paramètres a priori) et la pertinence de nos calculs, par rapport à des résultats récents (présentations à l'OSTST 2015, Reston, EU). Pour un réseau de 20 stations, on a environ 3700 mesures (PN), et pour un coeur de 6 stations, environ 1750 mesures. Enfin, nous pouvons sélectionner les mesures de télémétrie à haute élévation ; avec un critère à 60 degrés au minimum, le nombre de mesures avec 6 stations passe alors à environ 600 :

- cas 1L : avec 20 stations laser et les sources d’erreurs : orbite ($R : 7.6$, $T : 20.1$ mm), repère ($XYZ : 3$ mm) et mesures ($\rho : 2-12$ mm), nous obtenons un RMS global de 12-14 mm sur 3722 mesures suivant les cas (les bruits, soit sur les coordonnées des stations du repère, soit sur les mesures – précision et propagation ne sont jamais les mêmes).

Les appoints sur les coordonnées des stations laser sont ajustés, sur 7 jours, afin de faire un test ; les résultats, en moyenne, montrent un bruit résiduel de 6.6, 5.9, 6.8 mm sur les trois composantes.

- cas 2L : si l’on réduit le repère au coeur des 6 stations choisies notamment par Jalabert et al. (OSTST 2015), le RMS passe à 10-12 mm pour 1766 mesures ;
- cas 3L : avec une sélection des passages de haute élévation (sup. à 60 degrés, ici) le RMS tombe à 7.5 mm en moyenne. Ce dernier type de sélection permet de réduire l’effet d’erreur d’orbite en T ainsi que les problèmes de correction de mesure à plus basse élévation et enfin aux erreurs horizontales sur les coordonnées.

Nous n’avons pas ajusté de paramètres globaux, sachant que Jason-2 n’intervient pas dans l’estimation du repère de référence laser. Actuellement, les performances des calculs d’orbite sur Jason-2 sont évaluées de manière extérieure par les données de télémétrie laser, à 12-13 mm (RMS) globalement, et à 8-9 mm pour les données à haute élévation. Notre méthode est donc validée en bonne partie.

cas	Stations /Mesures	Résidus mm	RMS coord. mm	Transform. 7-P	
			XYZ	Tx,Ty,Tz	Ech.
1 L	20 / 3,722	12.-14.	6.6, 5.9, 6.8	—	
2 L	6 / 1,766	10.-12.	3.8, 2.0, 6.3	—	
3 L (hte elev.)	6 / 620	7.4-8.1		—	

TABLE 4.2 – Conséquences des erreurs de mesures (PN), d’orbite et de repère ; cas laser avec Jason-2, sur 7 jours.

Doppler DORIS. Le bruit DORIS est fixé à 0.2 mm/sec pour toutes les mesures (Ch. Jayles, A. Auriol, F. Mercier, L. Ceri) ; une erreur aléatoire équivalente à un défaut de correction troposphérique de ± 10 mm est ajoutée à chaque passage, compte tenu des analyses IDS menées et des limites liées à l’estimation de la correction dite “humide” (voir Chapitre 2, les travaux de Willis et al. (2013) sur les biais troposphériques communs entre DORIS et GPS). Nous utilisons une période d’analyse de 7 jours.

Nous avons choisi de faire un tri statistique qui limite le nombre de données théoriques à un taux d’acquisition qui est fixé à l’avance. Par exemple, pour DORIS toutes les stations possèdent un taux de 85%. Avec un total de 46 stations, le nombre de mesures est d’environ 56,500, avec 900 à 2000 mesures par station (pour environ 30-35 passages). Deux grands tests sont résumés Table 4.3 :

- cas 1D : avec 46 balises et les sources d’erreurs : repère (XYZ : 4-5 mm) et mesures ($\dot{\rho}$: 0.2 mm/sec), nous obtenons un RMS global de 0.205 mm/sec avec 56,516 mesures.

Les appoints aux coordonnées des stations DORIS sont ajustés ; les résultats, en moyenne, montrent un bruit résiduel de 7.7, 6.6, 6.3 mm sur les trois composantes. Au plan global les translations T_{xyz} et rotations R_{xyz} restent négligeables. Le coefficient d’échelle du repère, sans dimension reste à $0.112 \cdot 10^{-9}$ soit < 1 mm.

- cas 2D : cas 1D avec, en plus, l’introduction d’une erreur d’orbite (R : 7.6, T : 20.1 mm, idem que le cas laser), le RMS passe à 0.221 mm/sec.

Les appoints aux coordonnées des stations DORIS sont ajustés ; les résultats, en moyenne, montrent un bruit résiduel de 16.2, 16.0, 10.0 mm sur les trois composantes ; les translations et rotations de la mise en référence du réseau obtenu sont du même niveau avec une composante T_y (19.5 mm) importante.

cas	Stations /Mesures	Résidus mm/sec	RMS coord. mm	Transform. 7-P mm et μ arcsec	
1 D	46 / 56,516	0.205	XYZ 7.7, 6.6, 6.3	Tx,Ty,Tz 0., 0.7, -1.1 Rx,Ry,Rz 15.3 , 2.5 , 15.6	Ech. 0.112
2 D	46 / 56,489	0.221	16.2, 16.0, 10.0	-9.1, 19.5, 14.3 -151.7 , 94.9 , 11.8	0.133

TABLE 4.3 – Conséquences des erreurs de mesures (vit. radiale), d’orbite et de repère ; cas Doppler-DORIS avec Jason-2, sur 7 jours.

Avec l’erreur d’orbite, notre résidu Doppler global, de 0.221 mm/sec, est donc sous-estimé par rapport au bruit résiduel DORIS, connu par les analystes de 0.3-0.35 mm/s. Ceci implique donc que le bruit des oscillateurs, au niveau des balises au sol, comme au niveau du récepteur OUS à bord, que nous avons utilisé est largement sous-estimé.

L’ajustement des appoints de coordonnées des stations DORIS est ici plus perturbé qu’avec le réseau laser (voir Table 4.2), d’un facteur 3. Par rapport au cas 1D, l’introduction de l’erreur d’orbite en 2D, en modifiant de seulement 10% le RMS des résidus, modifie donc profondément le bruit sur l’ajustement des coordonnées des stations donc aussi sur les paramètres globaux ; T_y et R_x sont les plus touchés.

Nous pouvons faire la remarque suivante par rapport aux méthodes appliquées par les analystes notamment à l’IDS. Ici, nous faisons un calcul de réseau pour une seule trajectoire. Le repère international DORIS est en fait construit avec 4-5 satellites, actuellement : HY-2A, Jason-2, SPOT-5 (jusqu’en 2014), Cryosat-2, etc. Nos appoints sur les coordonnées et sur les paramètres globaux T, R sont donc surestimés, étant calculés avec une seule orbite, celle de Jason-2. Enfin, nous ne trouvons pas d’effet particulier sur les composantes en OZ, et sur le T_z .

Concernant le bruit DORIS, nous avons mené un test avec un bruit de 0.3 mm/sec. La somme des transferts d’erreurs de mesure, d’orbite et de repère s’établit ainsi globalement à 0.33-0.34

mm/sec, pour un arc de 7 jours avec Jason-2. Les résultats, en terme de positionnement des stations DORIS au sol, sont un peu dégradés ; on passe de 10-16 mm RMS (voir Table 4.3) sur les appoints de coordonnées ajustés, à 20-23 mm ; idem pour les paramètres globaux T, R .



FIGURE 4.15 – Carte globale des balises DORIS, http://ids-doris.org/images/world_map_doris.jpg

Variations temporelles. Avec des calculs menés sur 7 jours, nous effectuons après chaque calcul une transformation à 7 paramètres d'Helmert ; le but est d'analyser l'évolution globale du repère instantané dans le temps (ici, sur un an) sous l'influence d'une erreur d'orbite (RTN) dépendant du temps, venant donc des variations temporelles des coefficients géodynamiques.

Nous regardons les conséquences des erreurs de mesure et d'orbite en ajoutant des effets de bas degrés (géocentre $G_{xyz} : (2.5, 2.2, 2.7)$ mm et pôle $(dx_p, dy_p) : (2.7, 3.8)$ mm) à travers les coefficients géodynamiques correspondants.

Ces erreurs sont donc intégrées et propagées dans le temps le long de l'orbite de Jason-2, puis assimilées à travers les observables (vitesse radiale) sur les coordonnées des stations du réseau DORIS. Ces tests consistent à introduire les erreurs suivantes (nous n'avons pas pris en compte d'erreurs a priori sur les coordonnées des balises comme dans les cas 1D et 2D ci-dessus, en statique) :

- de type-1 : mesure seulement (cercle-noir),
- de type-2 : mesure et orbite (carré-rouge)
- de type-3 : mesure et orbite en excluant l'effet de géocentre et de pôle (diamant-bleu).

La figure (4.16) exprime l'évolution sur un an (dates en MJD) des paramètres instantanés de la transformation d'Helmert pour (a) : T_{xyz} en mm, et pour (b) : R_{xyz} en μ seconde d'arc (100μ sa : 3 mm). Ce que nous constatons, ce sont des coefficients peu bruités avec des signaux marqués à longue période :

- type-1 : ce test nous permet de contrôler la stabilité des coefficients (T, R) du repère global, puisque le repère utilisé est parfaitement homogène : taux d'acquisition identique par station, et bonne répartition géographique.
- type-3 : les erreurs d'orbite viennent des effets périodiques, annuels et semi-annuels, des coefficients du champ de gravité ; ces erreurs sont assimilées par chaque station, ce qui affecte

le repère global dans son ensemble. Les paramètres T, R prennent une allure périodique même sans effet de géocentre donc sans degré 1. Les plus marqués sont T_x et R_x ; R_y , le plus bruyé, prend un signal semi-annuel; R_z est affecté par un signal à environ 50 jours.

Enfin, T_z est affecté par un signal à longue période, qui comporte des sauts; nous avons vérifié la théorie et avons constaté que dans certaines conditions, des perturbations (jeux en $m = 0, k = \pm 1$) sont mal calculées.

- type-2 : les erreurs d'orbite contiennent, dans ce cas, les variations des coefficients à bas degré (évolution annuelle du géocentre, et bruit du pôle). Les paramètres T_x et T_y sont les plus marqués, et tous les autres ne changent presque pas.

Le non transfert du signal annuel C_{10} (qui correspond à G_z) sur T_z est surprenant; alors que son amplitude totale (crête à crête) est la plus importante, de l'ordre de 50 mm.

En conclusion, nous pouvons dire que le bruit sur les paramètres globaux est faible, de l'ordre de quelques mm. Les signaux sont très cohérents en T_x et T_y , ce qui est confirmé par les analystes (DORIS et le laser sont cohérents sur ces paramètres). Le paramètre T_z , avec une variation totale importante est certainement le moins bien déterminé par la seule orbite de Jason-2.

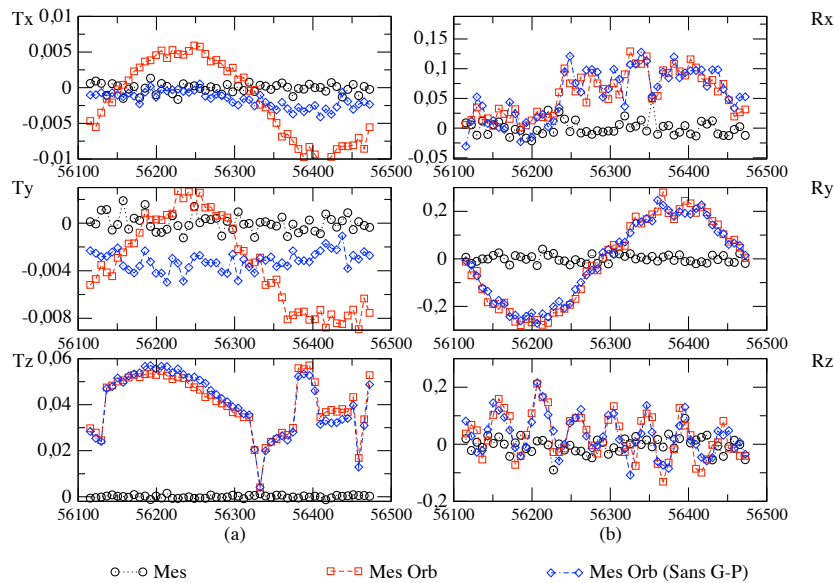


FIGURE 4.16 – Conséquence sur les paramètres instantanés de transformation globale, des transfert d'erreurs de mesure (cercle-noir) Doppler type DORIS, de mesure-orbite (carré-rouge) et de mesure-orbite sans effet de géocentre & pôle (diamant-bleu); T_{xyz} en m et R_{xyz} en milli-arc-sec; basé sur 1 an d'orbite de Jason-2

Il ne faut pas négliger les variations sur les rotations R qui sont affectées (plusieurs mm) par les erreurs d'orbite d'origine gravitationnelle; par exemple un signal à 50 jours s'installe sur R_z en relation avec la période du noeud.

Enfin, les tests -2 et -3 montrent que l'introduction du géocentre (coordonnées de quelques mm) se confond largement avec les signaux annuels du champ. L'effet principal noté sur ces graphiques

provient donc des signaux annuels du champ, et pas du géocentre (différence entre les points en diamant-bleu et les points en carré-rouge). En conclusion, pour les analystes, nous pouvons dire que : il faut obtenir, le plus possible, des déterminations indépendantes du mouvement du géocentre par la géophysique globale, et ne pas estimer ses coordonnées à partir des variations de T_{xyz} dans les trois directions. Bien entendu, avec l'utilisation de plusieurs orbites (Jason, Cryosat, SPOT, Saral, etc.), ce problème est moins important.

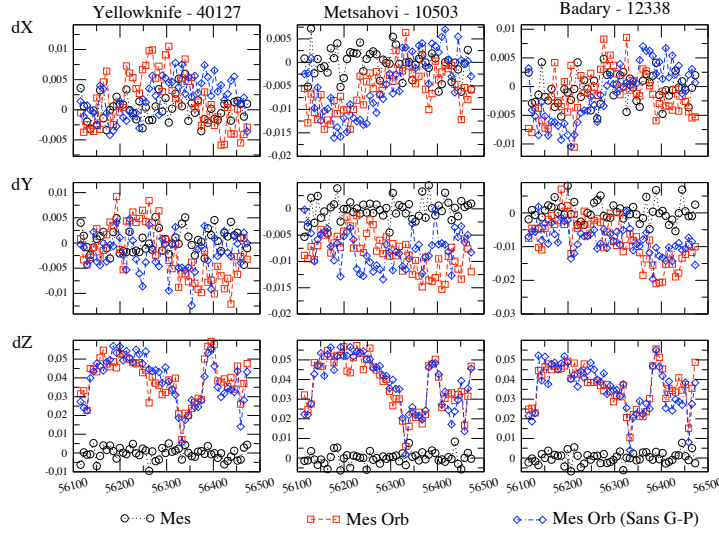


FIGURE 4.17 – Conséquence des erreurs (en m) de mesure (cercle-noir), des mesure-orbite (carré-rouge) et de mesure-orbite sans effet de géocentre & pôle (diamant-bleu) sur les coordonnées des stations Yellowknife-40127, Metsahovi-10503 et Badary-12338 situé à l'hémisphère nord

Grâce à la bonne répartition du réseau DORIS (figure 4.15), nous regardons le transfert des erreurs sur trois groupes de stations : hémisphère nord (Yellowknife-40127, Metsahovi-10503 et Badary-12338, figure 4.17) ; hémisphère sud (Rio-Grande-41507, Marion-Island-30313 et Terre-Adelie-91501, figure 4.18) et autour de l'équateur (Arequipa-42202, Libreville-32809 et Manille-22006, figure 4.19).

Presque toutes les conséquences des erreurs d'orbite (carré-rouge) ont une même forme qui est conduite par l'erreur du géocentre et du champ de gravité (bleu). Elles effectuent sur les paramètres ajustés (dX , dY , dZ) $\pm 4-6$ cm pour les stations aux deux hémisphères, alors que pour le groupe des stations à l'équateur c'est d'environ ± 3 cm (meilleure visibilité globale de l'orbite).

La conséquence de G est exprimée en comparant les types -2 & -3 des erreurs. Elle montre une amplitude d'environ $\pm 1-2$ cm pour des stations au nord et à l'équateur (figure 4.17, 4.19). Mais les composantes dZ des stations ont des différences, montrant que l'impact de G est très faible par rapport la signature du champ de gravité dans l'erreur d'orbite.

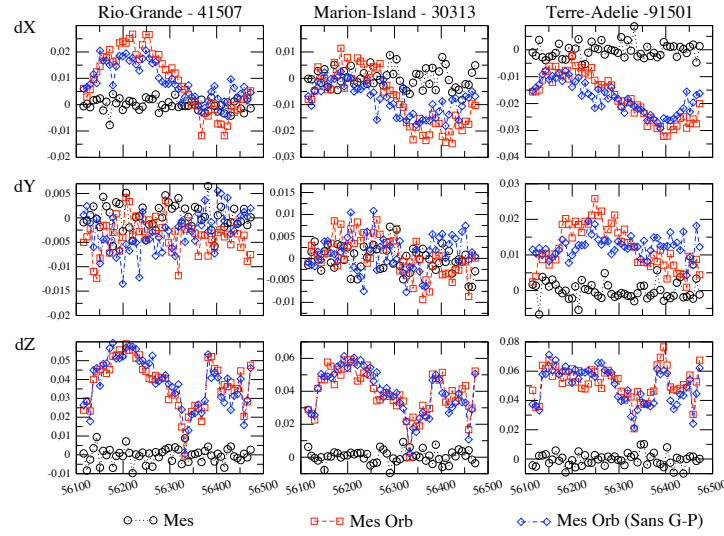


FIGURE 4.18 – Conséquence des erreurs (en m) de mesure (cercle-noir), des mesure-orbite (carré-rouge) et de mesure-orbite sans effet du géocentre & pôle (diamant-bleu) sur les coordonnées des stations Rio-Grande-41507, Marion-Island-30313 et Terre-Adelie-91501 situé à l'hémisphère sud

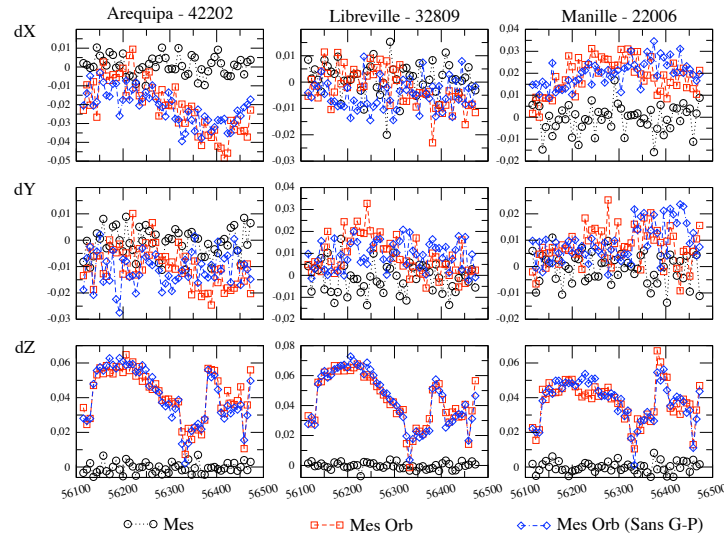


FIGURE 4.19 – Conséquence des erreurs (en m) de mesure (cercle-noir), des mesure-orbite (carré-rouge) et des mesure-orbite sans effet du géocentre & pôle (diamant-bleu) sur les coordonnées des stations Arequipa-42202, Libreville-32809 et Manille-22006 situé autour l'équateur

4.4.2 Cas de LAGEOS (laser)

Avec LAGEOS, nous avons effectué tout d'abord trois tests, avec des origines d'erreurs différentes (cas décrits dans le tableau 4.4).

Analyse des situations. Le traitement est réaliste en terme de nombre de stations, passages et

Sources	Valeurs (mm)	cas 1	cas 2	cas 3
Mesures (PN)		x	x	x
instruments	1-5			
correct. tropo	4			
Orbite (R/T/N)	4 / 7.6 / 3		x	x
Repère (XYZ)	3.5			x

TABLE 4.4 – Les différents sources d’erreurs sur les mesures laser ; PN : Points Normaux calculés par une moyenne toutes les 120 secondes, à partir des paramètres technologiques de chaque station.

mesures, par rapport aux analyses conduites par les auteurs (Rudenko, Sosnica et Zelensky). Les origines des bruits viennent des mesures (instruments laser par station et défauts de correction troposphérique), de l’orbite (propagation d’erreur, voir Chapitre 3 et Annexe), et aussi du repère (sur les coordonnées a priori des stations) pour faire des tests. En aucun cas, nos tests ne prennent en compte les vitesses des stations (mouvements propres) ; une des améliorations à faire dans l’avenir pour cette méthode.

En dehors de l’orbite dont les erreurs sont propagées par notre méthode, toutes les sources d’erreurs proviennent de notre analyse a priori sur les sources d’erreurs de la géodésie (voir Chapitre 2). Les trois cas décrits fournissent les résultats donnés Table 4.5.

cas	Stations / Mesures	Résidus	RMS coord.	Transform. 7-P	
1	20 / 1,790	3.6	XYZ 1.5, 1, 1	Tx,Ty,Tz 0 , 0 , 0 Rx,Ry,Rz 7. , -10. , -7.	Ech. 0.009
2	20 / 1,790	5.9	2, 2, 2	-4.0 , -6.2 , -0.5 38. , -44. , -1.	0.019
3	20 / 1,790	8.0	4, 3, 5	-5.0 , -5.0 , -1.0 38. , -36. , -5.	0.296

TABLE 4.5 – Les différents cas : conséquences sur la sensibilité du repère laser aux erreurs de mesures, et d’orbite (plus repère pour test), selon les trois cas (1,2,3) ; valeurs en mm et $\mu\text{sec.}$ d’arc.

- Cas 1 : il consiste à prendre en compte les erreurs de mesures, avec une répartition des stations identique au réseau laser actuel. Ces erreurs proviennent de chaque instrument laser utilisé (largeur du pulse de 30 à 150 ps, et cadence d’acquisition de 10 à 1000 Hz) ainsi que d’une estimation, en cours de passage, d’un bruit de propagation troposphérique de ± 4 mm [Mendes and Pavlis \(2004\)](#).

Logiquement, puisque les bruits de mesures sont de moyenne nulle, on trouve un résidu global, sur 7 jours (20 stations et 1,790 mesures laser PN), de 3.6 mm et pas de valeur sensible des paramètres de la transformation globale.

- Cas 2 : nous avons injecté les erreurs d’orbite (4-5 mm en R , et 7-8 mm en T) provenant d’une différence des modèles EIGEN-6S & -5S ; elles impliquent une dispersion de quelques mm

(RMS) dans les trois coordonnées ajustées des stations. Après un calcul de transformation d'Helmert de ce repère, les paramètres de la transformation, T et R , sont changés de quelques mm, mais on ne note pas de modification importante du facteur d'échelle (0.019 correspond sur la Terre à 0.6 mm).

- Cas 3 : il consiste à prendre en compte, par rapport aux deux cas précédents, des erreurs de repère a priori ; nous avons choisi de faire un test en injectant des bruits sur les coordonnées rectangulaires des stations au niveau de ± 3.5 mm. Le résultat, après ajustements des coordonnées des stations et une transformation globale, ne change pas par rapport au cas 2, sauf pour le facteur d'échelle. Sa valeur peut venir d'une mauvaise répartition des stations par rapport aux bruits injectés.

On note que [Zelensky et al. \(2014\)](#) trouve également des paramètres de translations, de rotations et un facteur d'échelle de même niveau.

Variations temporelles. Par une même stratégie que pour l'orbite Jason-2, nous prolongeons les calculs sur le réseau laser pendant un an. Nous regardons les effets sur le 7 paramètres de la transformation d'Helmert appliquée à chaque période de 7 jours indépendante. Ces tests aussi consistent à comparer les conséquences sur la stabilité du repère laser, des erreurs de type-1 : mesure (cercle-noir), de type-2 : mesure-orbite (carré-rouge, avec effets de géocentre et de pôle) et de type-3 : mesure-orbite en excluant l'effet de géocentre et de pôle (diamant-bleu).

Ici, les erreurs d'orbite proviennent uniquement de l'évolution temporelle des coefficients HS annuels et semi-annuels du modèle EIGEN-GL04S, comparé aux cas trois précédents (Table 4.4) où les différences des coefficients sont fixes. Les effets du géocentre G_{xyz} ($= 2.5, 2.2, 2.7$ mm) sont calculés en tant que coefficients de degré un et de période annuelle, et le pôle dx_p, dy_p ($= 2.7$ et 3.8 mm) est calculés en tant que bruit sur les coefficients de degré deux.

La figure (4.20) montre que la conséquence de l'erreur d'orbite (type-2) sur les composantes Tx, Ty est d'environ ± 4 mm et $\pm 0.03 - 0.04$ mas pour les rotations Rx, Ry, Rz. L'impact du G-P conduit à une amplitude de 3 mm sur Tx, Ty alors que nous avons peine à reconnaître cet effet sur les paramètres de rotation et Tz.

Contrairement à l'orbite de Jason-2, les variations temporelles du champ de gravité ont un impact moins forts et n'impliquent pas, hors effet G-P, de signaux à longue période. L'effet de Géocentre est même bien décorrélié sur Tx et Ty alors que ce n'est pas le cas sur Tz. Les rotations sont relativement bruitées mais à un niveau faible de l'ordre de 0.030 mas, soit 1 mm. Les analystes trouvent une limite à environ 0.070-0.090 mas (voir les solutions de l'ILRS pour l'estimation du mouvement du pôle).

Contrairement au réseau DORIS, les stations Laser ont des scénarios différents à cause des technologies différentes entre les stations. Nous choisissons deux stations 7090 (Yarragadee) et 1824 (Golosiiv) qui n'ont pas la même qualité du taux d'acquisition, 65 et 35% respectivement.

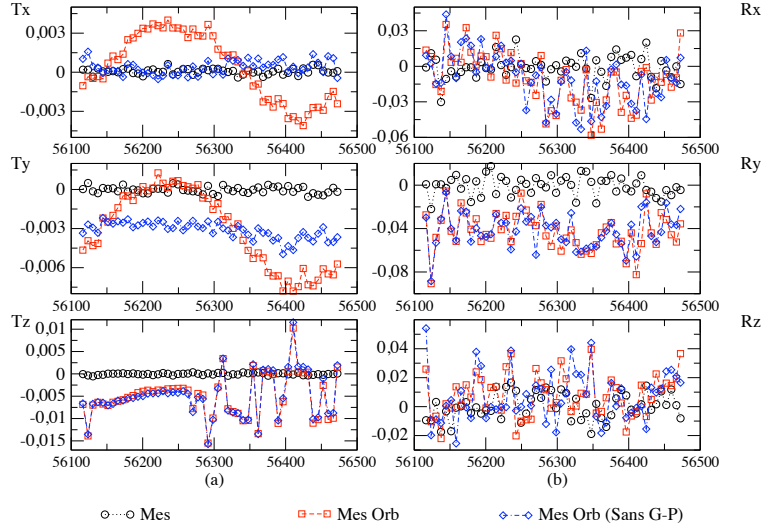


FIGURE 4.20 – Conséquence sur les paramètres instantanés de transformation pour les cas d’erreur de mesure (cercle-noir), de mesure-orbite (carré-rouge) et de mesure-orbite sans effet de géocentre & pôle (diamant-bleu) ; T en m et R en mas.

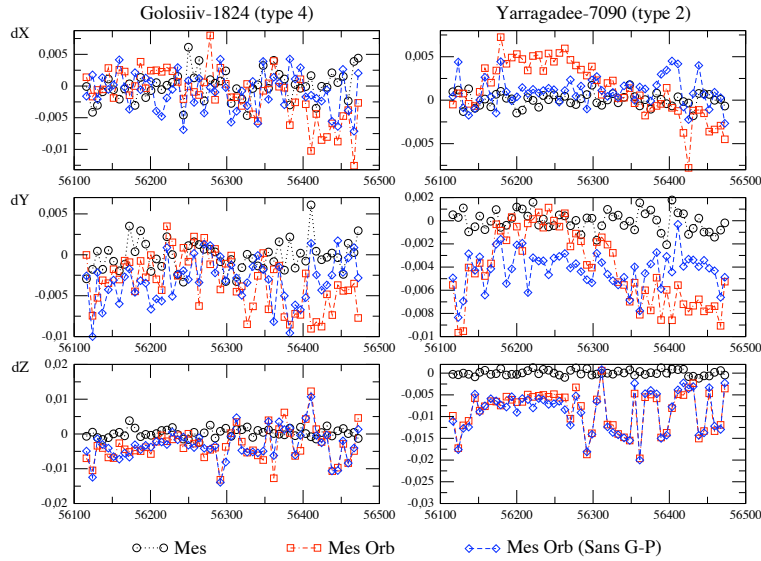


FIGURE 4.21 – Conséquence des erreurs (en m) de mesure (cercle-noir), des mesure-orbite (carré-rouge) et des mesure-orbite sans effet du géocentre- pôle (diamant-bleu) sur les coordonnées des stations de réseau Laser

Compte tenu de l’altitude, l’erreur d’orbite sur LAGEOS-1 (provenant de la même source d’erreurs sur le champ de gravité) implique des effets moins importants sur le repère laser par rapport à ceux obtenus pour Jason-2 avec DORIS. Les conséquences sont maximum ± 5 mm avec l’influence de G-P (en comparant les erreurs de type-2 & -3).

Aussi, en conclusion, on peut dire que sans une télémétrie laser au niveau presque millimétrique

(cas de la station de Yaragadee), avec un bon taux d'acquisition, il n'est pas possible de lire clairement dans les coordonnées géocentriques, les effets globaux comme celui de géocentre.

4.4.3 Conclusion

Nous avons estimé les erreurs d'orbites des satellites Jason-2 (satellite altimétrique, utilisé par l'IDS pour le positionnement des balises du réseau) et LAGEOS-1 (satellite géodésique utilisé par l'ILRS). Plusieurs sources d'erreurs ont été sélectionnées, venant du champ de gravité et de la pression de radiation solaire directe : en fait le coefficient de réflectivité global (0.1 à 2 % suivant les cas) et la surface exposée des panneaux (0.01 à 0.1 m^2).

Nous constatons que la méthode est efficace puisqu'elle permet de donner directement le pseudo-résidu d'orbite RMS dans les trois directions RTN . En ajoutant erreurs d'orbite, de mesure et de repère, les valeurs s'établissent à 12 mm en radial pour Jason-2 (8 mm si l'on considère uniquement des données laser > 60 degrés d'élévation), et à 7-8 mm (radial) pour LAGEOS. C'est ce que trouve les analystes à partir de multiples comparaisons de solutions.

Dans un second temps, nous avons propagé ces erreurs dans chaque repère local (station), ce qui permet d'intégrer les erreurs pendant la période de l'arc d'orbite considéré (de 7 jours). Ainsi cette intégration permet de calculer un appoint sur les coordonnées de la station considérée et, finalement, sur toutes les coordonnées des stations choisies. Le réseau a ensuite été mis en référence par une transformation à 7 paramètres dont nous pouvons suivre l'évolution temporelle des coefficients (cas traités sur 1 an) : T , R et le facteur d'échelle.

Les résultats montrent un signal, généralement fort sur T_x et T_y , dû au géocentre (2-3 mm d'amplitude d'un terme annuel sur les trois coordonnées), avec les deux satellites. Ceci montre pourquoi les analystes sont d'accord sur les composantes T_x et T_y déterminées soit par DORIS soit par le laser.

Les effets des coefficients périodiques géodynamiques sont plus marqués sur Jason-2 et presque absents sur LAGEOS dû à son altitude élevée. Sur Jason-2, le signal induit vient parfois se corréliser avec le signal de géocentre, ce qui peut donner des confusions dans les analyses, notamment en T_z . Pour les deux satellites, les signaux sur T_z (effet Nord-Sud) sont très bruités avec des variations plus importantes, et des signaux corrélés.

Enfin, on note une période de 50 jours dans R_z venant de la modulation des erreurs périodiques de champ de gravité, par les angles de l'orbite de Jason-2.

Les effets en T_z comme ceux en R_z doivent être plus analysés. Pour améliorer ou au moins stabiliser les solutions des repères de référence (< 2 mm, 3D), il faut impérativement améliorer la composante verticale des coordonnées des stations. Il faut donc améliorer les biais laser (qualité de la technologie : incertitude et stabilité long terme) pour de nombreuses stations, comme c'est le cas pour la station de Yaragadee. Il faut aussi continuer à utiliser plusieurs satellites pour DORIS,

et améliorer le bruit des oscillateurs à 0.1 mm/sec ou mieux. Enfin il faut mieux comprendre les modèles et le traitement de la correction troposphérique, en privilégiant des co-locations DORIS-laser (micro-ondes versus optique).

Finalement, sans données extérieurs sur les variations périodiques du champ de gravité global, d'origine hydrologique (géocentre compris), il sera difficile de contraindre les orbites au niveau de 2-3 mm, et donc des produits géodésiques au niveau du millimètre (le défi GGOS).

Pour le cas de LAGEOS, avec quelques observatoires fondamentaux de grande qualité et une technologie laser d'une précision de 50-70 μm en simple photon et à haute cadence (incertitude à 1 mm), l'erreur d'orbite atteindra probablement le niveau de 2-3 mm (limité par l'atmosphère et les corrections optiques des réflecteurs) à partir de 2020.

Conclusion et Perspectives

Conclusion

La géodésie spatiale, en tant que science de la mesure de la Terre depuis l'espace, a beaucoup progressé dans ses données et ses modèles depuis 10-15 ans. La modélisation du champ de gravité de la Terre est au centre des avancées (missions CHAMP, GRACE et GOCE), ainsi que le calcul d'orbite par méthode dynamique. Plusieurs problèmes et secteurs d'améliorations ont été publiés ces dernières années dans ce domaine. La précision d'orbite est souvent au centre des analyses, à environ ≈ 10 mm, la répétabilité des coordonnées géocentriques des observatoires est au même niveau, et les mesures ou observables comme le laser ont une incertitude également de 8-10 mm. Enfin, la technique Doppler DORIS semble avoir une limite, au moins dans les analyses, à 0.3-0.35 mm/sec alors que des progrès importants ont été réalisés au plan technique sur les oscillateurs pour la référence de fréquence ; à $1\text{-}2 \cdot 10^{-13}$ sur 10 secondes, soit dix fois mieux que les résidus courants.

L'altimétrie satellitaire a un besoin important, sur le long terme, d'observer l'océan et de mettre à disposition de longues séries temporelles du niveau de la mer à 0.1 mm/an près, au plan global comme régional. Or dans ce domaine, l'orbitographie précise joue un rôle très important (voir les réunions annuelles de "l'Ocean Surface Topography Science Team" sur le site web d'AVISO ² avec des limitations au niveau du champ de gravité, notamment sur la disponibilité des données gravimétriques pour estimer les variations périodiques aux degrés > 2).

Les repères d'espace comme les solutions de l'ITRF, dont la stabilité dans le temps et la continuité des mesures et des services (observatoires), qui sont aussi des points d'étude et de pré-occupation constants des géodésiens et de la Société tout entière, sont également dépendant de la qualité de la dynamique des satellites (altitude des GNSS et plus bas jusqu'à 1000 km).

Nos travaux méthodologiques sur l'analyse des performances courantes de la géodésie globale se situent à un moment où les instances internationales souhaitent atteindre le millimètre pour les produits géodésiques de 2020, accessibles par tous. Nous avons développé une théorie analytique d'orbite de satellite pour des trajectoires quasi-circulaires, en coordonnées sphériques et en repère incliné et précessant, et avons ensuite adapté cette méthode à l'analyse d'erreurs d'orbite. Les développements utilisent des relations de récurrence pour les rotations des harmoniques sphériques afin d'atteindre des degrés élevés du champ. Les transferts d'erreurs issues de la dynamique et des systèmes de poursuite laser et Doppler des satellites, ont été formalisés sous la forme de relations de cause à effet.

A partir de plusieurs travaux d'analyse récents sur les sources liées aux erreurs d'orbite, nous avons développé des outils, des stratégies d'estimation et de calculs. Ceci nous a permis de manipuler l'erreur d'orbite et aussi de contrôler les conséquences sur les produits de la géodésie spatiale. Nous avons étudié la stabilité spatio-temporelle des produits globaux comme la surface de la mer et le repère de référence terrestre.

2. <http://www.aviso.altimetry.fr/en/user-corner/science-teams/ostst-swt-science-team.html>

En appliquant les estimations à certaines missions (Jason-2, Saral et LAGEOS), nous avons présenté les principales causes et effets de l'erreur de la trajectoire. Ceux-ci sont liées aux différences entre les modèles de champ gravité de la Terre, y compris les variations périodiques annuelles et semi-annuelles, ainsi qu'à des termes particuliers de bas degrés. Les effets sont au niveau de quelques millimètres jusqu'à 15 mm selon les cas et les trajectoires. La solution que nous proposons a permis d'isoler chaque conséquence d'erreurs d'orbite (Jason-2 et Saral) sur la surface topographique de l'océan global. Les conséquences ont également été étudiées en terme de géométrie de repères de référence, donc sur les coordonnées des stations au sol avec DORIS et le laser.

Cette étude montre que la solution analytique en géodésie spatiale est toujours un moyen efficace pour identifier et analyser les relations de causes à effets depuis les modèles dynamiques vers l'erreur d'orbite et finalement dans les produits d'applications. En tant que méthode analytique elle peut s'appliquer directement à d'autres trajectoires, d'autres types d'observables ou de réseaux géodésiques voire aussi d'autres sources d'erreurs de la dynamique des satellites.

L'analyse des situations abordées dans mon travail est donnée à la fin de chaque section et/ou chapitre du document. Néanmoins, nous pouvons signaler les points importants suivants. Les erreurs globales d'orbite que nous estimons à partir d'erreurs géodynamiques, d'erreurs de mesures et d'erreurs de repère, sont tout à fait réalistes pour DORIS avec Jason-2 ou Saral et pour le laser avec LAGEOS (voir Tables 4.2, 4.3, et 4.5).

Ceci constitue une sorte d'étalonnage indispensable de notre méthode, qui reste sinon une méthode relative. A partir de ce résultat, la méthode fournit en outre des EGC pour les satellites altimétriques et des paramètres globaux instantanés (T_{xyz} , R_{xyz} essentiellement) pour les repères DORIS et laser. Les amplitudes trouvées dans chaque cas sont là aussi très réalistes, proches des résultats obtenus dans les articles récents décrits au Chapitre 2. Par exemple, nous estimons directement des valeurs de T_{xy} venant des effets ou erreurs périodiques (annuels, semi-annuels) du champ de gravité, avec ou sans géocentre. Ceci indique que la méthode nous permet de séparer les phénomènes et de déduire des effets parfois inattendus.

En revanche, la méthode est limitée par plusieurs problèmes. Tous les tests n'ont pas pu démontré (par exemple sur la composante T_z des repères instantanés) une grande stabilité comme sur les autres composantes. Le signal de 50 jours sur R_z dans le cas de DORIS sur Jason-2 n'est pas expliqué. Enfin, la méthode est basée sur une théorie d'ordre un, dite descendante, ce qui ne permet que partiellement d'analyser les situations de propagation d'erreurs (dans notre cas, essentiellement de l'orbite vers les produits géodésiques). En terme de perturbations d'origine dynamique, des tests plus importants doivent être menés pour la pression de radiation solaire (sans et plus tard avec les effets d'ombre), et pour les marées océaniques. Nous donnons les dérivées partielles du champ (U_{MO}), mais nous n'avons pas appliqué la solution analytique explicitement.

Perspectives

Le modèle EIGEN-GRGS.RL03-v2.MEAN-FIELD a été choisi comme standard GDR-E ; il est complet jusqu'au degré 260, étant basé sur les données/solutions GOCE (niveau DIR5) à partir du degré 81. Les coefficients variables (TVG) des degrés 1 à 80 ont été obtenus avec les solutions mensuelles GRGS-RL03-v2, entre 2002 et 2014. Mais pour la période 1985-2003, et notamment afin de reconstruire des séries altimétriques homogènes avec TOPEX/Poseidon (1992), des solutions à bas degrés ont été construites avec le laser (LAGEOS).

Mais, en dehors de ces périodes, le champ de gravité est seulement extrapolé, avec des hypothèses simples. Il est donc important d'étudier des solutions pour permettre de mieux maîtriser les variations de gravité, au moins de bas degrés, de manière permanente. Notre méthode a donc un avenir afin de contribuer à mieux comprendre les sources d'incertitudes donc les sources d'améliorations possibles.

- Les coefficients du modèle de champ gravité de la Terre sont plus en plus modélisés précisément avec des variations temporelles (herdomadaires, mensuelles ou saisonnières..) au degré 50x50 ou plus (au degré 80x80 pour des versions de modèle ITSG-Grace2014 ou GOCO05s ou encore GRGS.RL03). Il faut donc considérer plus profondément les effets sur les erreurs d'orbite.
- Ce travail est dédié à quelques analyses de sources d'erreurs mais c'est insuffisant. Aujourd'hui, nous nous intéressons encore à d'autres impacts comme des forces de freinage, des marées océaniques, des facteurs d'effet de mesures ou de réseaux, etc.
- Du côté numérique, il reste des choses encore limitées. Par exemple, nous ne pouvons pas encore déboucher sur les calculs pour les satellites GNSS. Et aussi il manque des matériaux pour manipuler les trajectoires sur de grandes périodes de temps.

Annexe A

Développements et Outils

Sommaire

A.1 Rappel, solution de Kaula	89
A.2 Outil de propagation d'orbite	93
A.3 Outil de propagation d'erreurs d'orbite	99
A.4 Outil de calcul des transferts d'erreurs	105

A.1 Rappel, solution de Kaula

En présence du potentiel de la force U qui perturbe le mouvement de satellite, les variations des éléments orbitaux képlériens $(a, e, i, \Omega, \omega, M)$ sont déterminées par les équations de Lagrange :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial U}{\partial M} \\ \frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial U}{\partial \omega} + \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial U}{\partial M} \\ \frac{di}{dt} = -\frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial U}{\partial \Omega} + \frac{\cos i}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial U}{\partial \omega} \\ \frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial U}{\partial i} \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial U}{\partial e} - \frac{\cos i}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial U}{\partial i} \\ \frac{dM}{dt} = n - \frac{2}{na} \frac{\partial U}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial U}{\partial e} \end{array} \right. \quad (\text{A.1})$$

Dans ce cas, on constate qu'il y a non seulement des divisions par zéro pour Ω et ω (si $i = 0$) ou pour ω et M (si $e = 0$), mais aussi deux éléments ω, Ω ne sont plus définis dans ces cas là. On peut remplacer alors par des jeux de six variables dits *non singuliers* et les équations deviennent plus compliquées à cause du mélange inévitable des éléments métriques et angulaires.

Forme des perturbations en éléments képlériens

Champ central. Il faut rappeler le développement du potentiel perturbateur en fonction des éléments orbitaux du satellite (Kaula) en repère inertiel (Zarrouati (1987), Eq. 51)

$$U = \frac{\mu}{a} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{a_e}{a}\right)^l F_{lmp}(i) G_{lpq}(e) S_{lmpq}(M, \omega, \Omega, \theta) \quad (\text{A.2})$$

Une étape importante de la transformation de U nécessite de prendre en compte les termes en :

$$\frac{R_0^l}{r^{l+1}} = \frac{R_0^l}{a^{l+1}} \frac{a^{l+1}}{r^{l+1}} = \frac{1}{a} \left(\frac{R_0}{a}\right)^l \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1}$$

Le demi grand-axe a a été introduit pour développer, en puissances de l'excentricité, l'expression :

$$\frac{a}{r} = \frac{1 + e \cos v}{1 - e^2}$$

Les fonctions¹ $G_{n,p,q}(e)$, dont on trouve également une expression dans Kaula (1966), permettent de transformer, dans le plan de l'orbite, la formulation en fonction des coordonnées polaires r et v en une formulation qui dépend des éléments kepleriens e et M :

$$\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \exp^{i((l-2p)v)} = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} G_{l,p,q}(e) \exp^{i((l-2p+q)M)}$$

Cette formule traduit la spécificité du développement de Kaula, qui est un développement en fonction de l'anomalie moyenne M . Il s'agit en fait d'un développement en série de Fourier. En évaluant des effets du potentiel on constate que le développement (A.2) est bien adapté pour scinder les termes dans les équations :

$$\begin{aligned} F'_{lmp}(i) &= \frac{dF_{lmp}}{di} \\ G'_{lpq}(e) &= \frac{dG_{lpq}}{de} \\ S'_{lmpq}(M, \omega, \Omega, \theta) &= \frac{dS_{lmpq}}{d\psi_{lmpq}} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

1. Cas particulier de fonctions dites de Hansen : $G_{l,p,q} = X_{n-2p+q}^{-(n+1),(n-2p)}$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_{lmpq}}{\partial a} &= -\frac{l+1}{a} U_{lmpq} \\
\frac{\partial U_{lmpq}}{\partial e} &= \frac{\mu}{a} \left(\frac{a_e}{a} \right)^l G'_{lpq}(e) F_{lmp}(i) S_{lmpq}(M, \omega, \Omega, \theta) \\
\frac{\partial U_{lmpq}}{\partial i} &= \frac{\mu}{a} \left(\frac{a_e}{a} \right)^l G_{lpq}(e) F'_{lmp}(i) S_{lmpq}(M, \omega, \Omega, \theta) \\
\frac{\partial U_{lmpq}}{\partial \Omega} &= m \frac{\mu}{a} \left(\frac{a_e}{a} \right)^l G_{lpq}(e) F_{lmp}(i) S'_{lmpq}(M, \omega, \Omega, \theta) \\
\frac{\partial U_{lmpq}}{\partial \omega} &= (l-2p) \frac{\mu}{a} \left(\frac{a_e}{a} \right)^l G_{lpq}(e) F_{lmp}(i) S'_{lmpq}(M, \omega, \Omega, \theta) \\
\frac{\partial U_{lmpq}}{\partial M} &= (l-2p+q) \frac{\mu}{a} \left(\frac{a_e}{a} \right)^l G_{lpq}(e) F_{lmp}(i) S'_{lmpq}(M, \omega, \Omega, \theta)
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Les seconds membres du système (A.4) sont toujours des fonctions harmoniques de l'argument ψ_{lmpq} défini dans la formule (A.2). Les termes périodiques sont organisés en jeux d'indices (l, m, p, q) , auxquels on peut faire correspondre la fréquence : $(l-2p+q)n + (l-2p)\dot{\omega} + m(\dot{\Omega} - \dot{\theta})$. Donc :

si $m = 0$, il s'agit de coefficients zonaux du géopotentiel, qui produiront donc soit des termes séculaires l pairs sur Ω, ω, M , soit des termes à longue période (en ω , soit des termes multi-périodiques.

si $(l-2p+q) = 0, m = 0, (l-2p) \neq 0$; M et θ sont absents mais ω est présent dans le second membre. Les écarts intégrés sont à longues périodes.

si $(l-2p+q) = 0, m = 0, (l-2p) = 0$; on a alors $\psi_{lmpq} = 0$. Le second membre est constant. Les écarts intégrés sont alors séculaires. Les conditions $m = 0, l = 2p$ entraînent que seul les zonaux pairs sont à l'origine d'écarts séculaires.

si $m \neq 0$, il s'agit de coefficients tesseraux. Là aussi, on peut retrouver des petits diviseurs, notamment pour certaines valeurs de l, m, p, q et de n, θ : ce sont des résonances.

si $(l-2p+q) \neq 0$; l'argument M est présent dans le second membre. Les écarts intégrés sont à courtes périodes.

si $(l-2p+q) = 0, m \neq 0$; M est absent mais le temps sidéral θ est présent dans le second membre. Les écarts intégrés sont à moyennes périodes.

Champ de Pression de radiation solaire directe (PRSD). La solution de Kaula pour le développement de la perturbation U_{PR} utilise les fonctions classiques $F(i), H(e)$ et leurs dérivées

(voir ci-dessus). Dans le cas du champ de pression, $l = 1$ uniquement, donc $m = 0, 1$ et $p = 0, 1$; on utilise donc :

$$\begin{aligned}
 F_{100} &= \frac{1}{2} \sin i & F_{110} &= \frac{1}{2} (1 + \cos i) \\
 F_{101} &= -\frac{1}{2} \sin i & F_{111} &= \frac{1}{2} (1 - \cos i) \\
 H_{10-1} &= -\frac{3}{2} e & H_{100} &= 1 - \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{64} e^4 - \dots & H_{101} &= \frac{1}{2} e - \frac{3}{8} e^3 + \dots \\
 H_{11-1} &= H_{101} & H_{110} &= H_{100} & H_{111} &= H_{10-1}
 \end{aligned}$$

La solution s'écrit en respectant les dérivées partielles de U_{PR} par rapport aux six éléments elliptiques. Cela ne représente pas de difficulté particulière.

Notons que dans les deux théories, circulaire et Kaula, le fait d'utiliser la longitude du Soleil dans l'écliptique permet d'utiliser une formulation plus simple que celle qui consiste à garder les coordonnées sphériques géocentriques équatoriales.

Enfin, compte tenu des effets à longues périodes sur e, i , il semble judicieux de prendre en compte les couplages de type $C_{2,0}.\sigma$ dans les termes séculaires en $\dot{\Omega}, (\dot{\omega} + \dot{M})$.

Champ de Marées océaniques. A partir de l'expression de U^{MO} (voir Chapitre 3), on peut calculer les dérivées tout comme pour le champ central. Ensuite, chaque équation de Lagrange correspondante est intégrée au premier ordre par rapport au temps (idem solution classique de Kaula).

A.2 Outil de propagation d'orbite

Principe (code)

Les théories analytiques envisagées dans nos travaux, Kaula en éléments képlériens et la théorie circulaire en coordonnées sphériques sont mises en oeuvre dans un même code mais elles sont calculées séparément à la charnière $e = 0.003$. Rappelons les paramètres utilisés : pour la théorie de Kaula, $(a, e, i, \Omega, \omega, M)$ dans un repère inertiel, et pour la théorie circulaire (r', ϕ', λ') dans le repère du plan d'orbite précessant – d'inclinaison i , par rapport à l'équateur, et d'ascension droite du noeud $\Omega + \dot{\Omega}(t - t_0)$.

```

Satellites-----!-----
001,dir,---      : Nbre satell, Caractéristiq, Elts moyens      (dir/fic, wr
dir              : Caractéristiq satell.: dir, /fichier Satellites: fic
Jason-2 !---     : Nom-a10 satellite 1
0506.000,001.000000,01,009.800000      : Mass, Surf-corps, nb Pann, Surf-pann (Kg, #
1.1000,1.0000      : Coeff reflectivite et Cx freinage      (
0.0100,0.0020      : Erreurs: S/M et Cr                      (pourc
: ...

Elts Moyens-----!-Elements moyens orbitaux-----
56111 00000.000    : Date du(es) jeu(s) /depart              (JJul, sec
rpl              : Type elts orbitaux /propager              (rpl,elk//RPL,ELK, ens
043200.0,000000.0  : Pas /propag orbite, /sauvegard elts moyens (Sec
rpl,rad          : Type elts lus, Unites angles              (elk,rpl,xyz, rad/deg
+0.771499500000E+07 +0.000000000000E+00 +0.115267857376E+01 (A, E, I // R, E, I
-0.136856684241E+01 +0.000000000000E+00 +0.197324743347E+01 (G, P, M // G, -, L=P+M
+0.000000000000E+00 +0.000000000000E+00 +0.000000000000E+00 (G. P. M.// G. - L. (r

Modele Dynamique---!-Modele pour integration analytique-----
P060060-----    : Cles coeff csts du champ                  (P000000--
Z50p50T50p50      : Var seculr/period. Zon. et Tesser.          (Z00p00T00
--zt--0-----    : SP: var. tempor., R: Press rad. solr, d/D: drag (SPzt, R0,

Modele Analytique--!-Modele simple pour theorie analytique-----
00180.0            : Pas /propag orbite                          (Sec
C060-----       : Cle theo. seculr, degre maxi /gravi          (W,w/K/C/
C060060--Q03      : ... .. periodiq, deg,ord maxi /gravi, e**Qmax (K/C/N, /
00.0100,00.0100,00.0100,00.0100,00.0100,00.0100 : Amplit. jeux AEI (m
00.0100,00.0100,00.0100 : ... RTN (m
jeu               : MODE Orbite ou calcul jeux/frq          (jeu,ofq,
xyz               : Param. Sauves /orbite Fmt interne        (elk,rpl,
01,-000.180      : num interne sat (ou 00), Frein           (m/j
: ...

FIN-----

```

FIGURE A.1 – Fichier de paramètres d'entrée pour le code de propagation analytique d'orbite.

Les solutions analytiques sont développées d'abord en jeux, soit (l, m, p, q) soit (l, m, k) suivant la théorie ; les amplitudes et fréquences des perturbations associées sont sélectionnées sur des critères d'amplitude "a minima". Le code est organisé afin de traiter plusieurs trajectoires dans le même "run" ; mais les calculs des jeux perturbatifs restent indépendants. La propagation des solutions prévoit l'utilisation d'un fichier de paramètres a priori (figure A.1) et la séquence de calculs suivants :

- 1 le choix du satellite et des éléments moyens de départ, le choix des paramètres ("rpl" ou "elk"), le choix du modèle dynamique,

- 2 le calcul des effets séculaires sur les angles, qui est paramétré en fonction du degré l maximum demandé,
- 3 le calcul des amplitudes des perturbations par jeu, en injectant les coefficients de modèles dans les solutions sans les termes en $S_{l,m,p,q}$ ou $S_{l,m,k}$; le nombre de jeux, par satellite, est limité par des valeurs maximales par paramètre (par exemple 0.01 m) de la solution (e.g. $r_1', \varphi_1', \lambda_1'$),
- 4 la propagation des éléments moyens avec a ou $r = a_0/r_0 + \dot{a}/\dot{r}(t - t_0)$, idem pour les angles (Ω, ω, M ou Ω, λ_0') avec un grand pas (6h). On note que \dot{r} ou \dot{a} sont (option de calcul) évalués par la première équation de Gauss ($2V F_T/n^2 a$, où F_T est estimée en moyenne),
- 5 la propagation des perturbations avec un pas fin (type 1min); on ne calcule que la phase $S_{l,m,p,q}$ ou $S_{l,m,k}$, qui dépend des angles moyens.

Dans le cas d'un champ de gravité variable ou d'un coefficient de modèle qui dépend du temps (à très basse fréquence, compte tenu des hypothèses d'une théorie analytique d'ordre un), les amplitudes des jeux (étape 2) sont recalculées régulièrement. Mais ceci ne veut pas dire que la théorie est prévue pour cela (l'intégration analytique ne le prévoit pas explicitement).

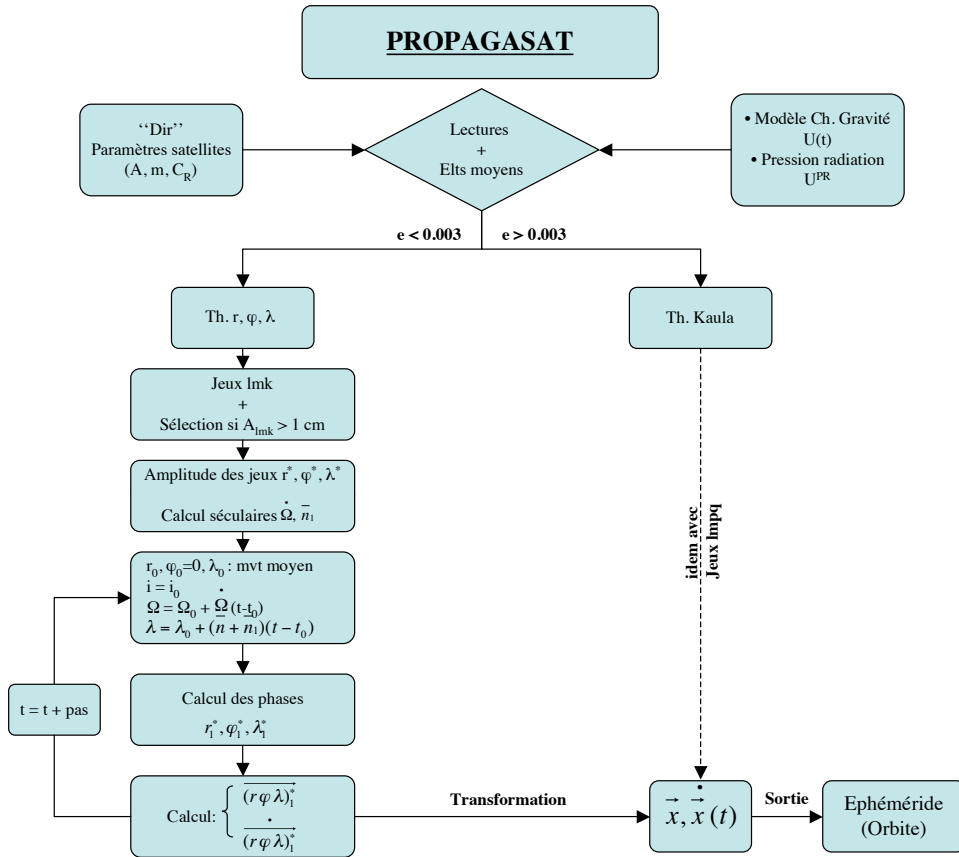


FIGURE A.2 – Organigramme de l'outil de propagation d'orbite

L'organigramme A.2 du code est donc simple pour deux options de théorie analytique quasi-

circulaire ($e < 0.003$) ou Kaula ($e > 0.003$), puisqu'il s'appuie sur la détermination des amplitudes des jeux perturbatifs de chaque potentiel envisagé (champ de gravité, pression de radiation, marées), puis sur la propagation des éléments moyens (problème des deux corps précessant) et finalement sur leur utilisation dans le calcul des phases des jeux perturbatifs. Il nous donc permet déterminer des solutions puis transformer aux vecteurs de position et de vitesse pour sortir une éphéméride (orbite).

Différences analytique et numérique

Nous avons mené des comparaisons des théories programmées avec une intégration numérique, afin de vérifier les théories et les codes. Les orbites LAGEOS-1 & -2 (à l'altitude d'environ 6000 km, et d'inclinaison 110 degrés), Jason-2 (à l'altitude 1335 km, d'inclinaison 66°) et Saral (à l'altitude 780 km, d'inclinaison 98°) sont extrapolées en utilisant le modèle statique EIGEN-GRGS.RL02bis.MEAN-FIELD (génération GDR-D basé sur 8 ans de données GRACE+LAGEOS) ; les développements du champ (degré et ordre) sont en 20x20, et 50x50 pour les trois satellites, respectivement.

Si la théorie circulaire est utilisée pour les satellites altimétriques Jason-2 et Saral (voir figure A.3), c'est la théorie de Kaula qui est utilisée pour les deux orbites LAGEOS (voir figure A.4).

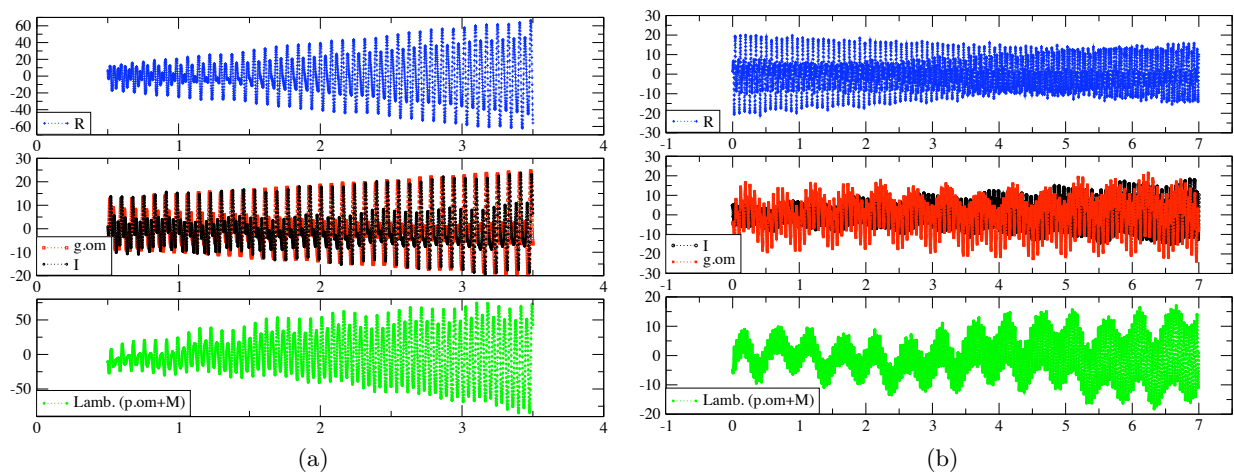


FIGURE A.3 – Différences (en m) entre théorie circulaire et intégration numérique pour l'orbite (a) : Jason-2 et (b) : Saral

Les résultats de quelques comparaisons, menées sur plusieurs jours, donnent des différences de l'ordre de plusieurs mètres sur les éléments a, e, i ou r' et d'une dizaine de mètres sur les angles. Notons que nous n'avons pas de procédure d'initialisation des éléments moyens de départ, ce qui peut contribuer à une amélioration des comparaisons (G. Métris et G. Lion, 2010). En outre, ce dernier article (non publié) montre qu'il est important de prendre en compte les effets séculaires du second ordre en $C_{2,0}^2$ sur les angles. Ceci fera partie des améliorations futures.

Compte tenu de l'amplitude des perturbations, de l'ordre de plusieurs kilomètres, nous pouvons dire que ces théories sont d'une précision relative de 10^{-3} , donc d'ordre un du petit paramètre ε . Pour la suite, il est important de mesurer cette limite puisque la propagation (par intégration analytique) d'erreurs inférieures à 1 m sera donc valable jusqu'à des quantités détectées <1 mm.

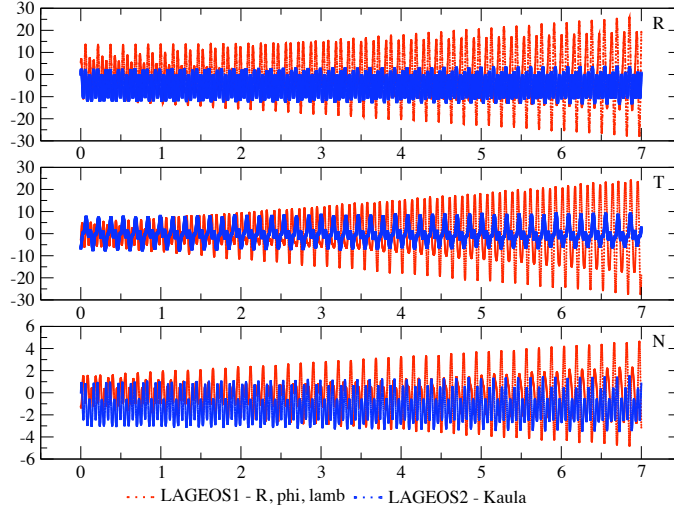


FIGURE A.4 – Différence (en m) entre théorie de Kaula et intégration numérique pour les orbites LAGEOS-1 & 2, respectivement.

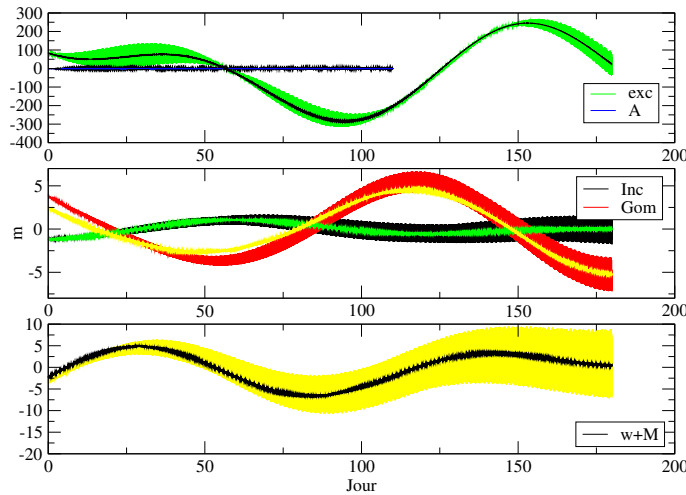


FIGURE A.5 – Différences (en m) (avec et sans pression de radiation solaire directe) pour la théorie de Kaula (traits fins) et l'intégration numérique (traits d'amplitude croissante) pour une orbite type Jason (altitude et inclinaison, mais avec $e = 0.004$).

Nous avons également vérifié le développement de la théorie pour le champ de pression de radiation solaire directe. Les jeux perturbatifs calculés (quand $e > 0.003$) sont essentiellement à courtes périodes sur a et à longues périodes sur $e, i, \Omega, et \omega + M$. Pour ces deux dernières variables, nous avons injecté, numériquement, les couplages sur les effets séculaires venant des variations

à longues périodes sur e, i . Les résultats sont présentés figure A.5; compte tenu des différences résiduelles, analytique – numérique, nous indiquons les différences numériques avec et sans pression de radiation et les différences équivalentes analytiques.

Spectre des perturbations

La construction des jeux des coefficients jusqu'aux degré et ordre 50 (voire plus) en négligeant des termes inférieur à 0.01 m, nous a permis de calculer les jeux des fréquences des perturbations agissant sur les orbites. Nous indiquons les fréquences et amplitudes radiales (R) sur les figures A.6 et A.7 pour les quatre orbites utilisées.

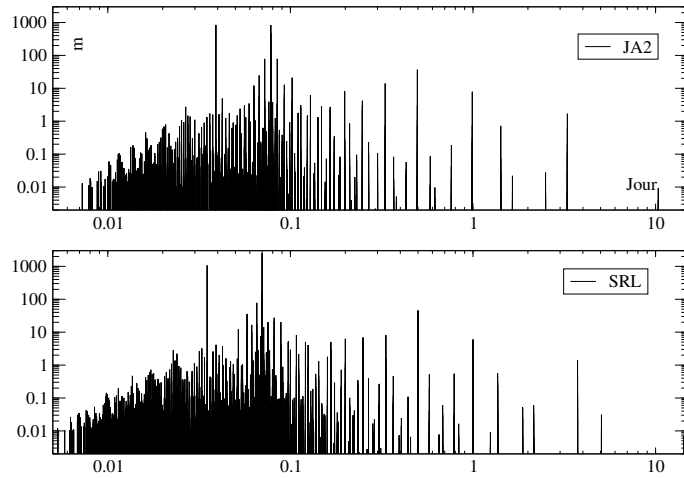


FIGURE A.6 – Périodes des perturbations radiales (en m) des orbites Saral et Jason calculées à partir du modèle EIGEN-GRGS.RL02bis.MEAN-FIELD jusqu'au degré et ordre 50.

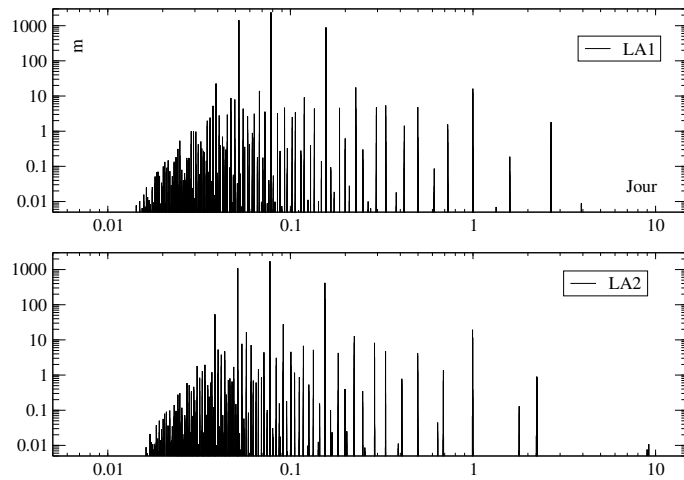


FIGURE A.7 – Périodes des perturbations radiales (en m) des orbites LAGEOS-1 et -2 calculées à partir du modèle EIGEN-GRGS.RL02bis.MEAN-FIELD jusqu'au degré et ordre 20.

Bien qu'il n'y a aucune différence dans la forme des spectres, la plus forte densité des jeux dans le cas de Saral montre l'impact de l'altitude (et de l'inclinaison) sur les perturbations du potentiel gravité, ce notamment sur les termes résonnants. Nous regardons les termes radiaux R , mais notons que tous les termes le long de la trace T sont en moyenne 10 fois plus forts.

TABLE A.1 – Valeurs des jeux résonnants (amplitude Radiale en m et Périodes en jours) pour le potentiel de gravité ; limite de sélection des jeux à 0.01 m sur R , T et N ; (d,o) : degré et ordre.

	degré & ordre	nb Jeux	Ω	$\omega + M$	Résonn. (d,o)	R max. / Périod.
Saral	50x50	3660	362.1	-60.1	15-50,14	1.4 / 3.74
					15-57,15	0.6 / 1.36
					28-50,28	0.05 / 1.87
					43,43	0.03 / 5.06
	60x60	3748			58,57	0.007 / 14.34
	70x70	3785			68,57	0.002 / 14.34
Jason-2	50x50	1935	-173.3	-206.3	13-25,12	0.7 / 1.42
					13-41,13	1.7 / 3.29
					26-40,25	0.006 / 2.50
					39-43,38	0.01 / 10.34
	60x60	1944			> 50,38	0.001 / id.
Lageos-1	20x20	2612	1052.4	-662.3	6-13,6	1.8 / 2.68
					12-14,13	0.02 / 3.9

La Table A.1 montre les jeux sur la composante R calculés par satellite. Pour Saral, la convergence des termes résonnants dans une même classe d'ordre (14, 28, 32, 56 etc.) est lente avec une période maximale de 14.3 jours. Pour Jason-2, la convergence est plus rapide et seuls subsistent des termes de 0.001 m au-delà du degré 50 avec des périodes entre 5 et 10 jours. Enfin, pour Lageos-1 nous trouvons les résonnances à l'ordre 6 ; les termes sur R convergent rapidement vers 0.001 m au degré 13 ; précisons que l'excentricité étant > 0.003 c'est la théorie de Kaula qui est utilisée d'où un nombre de jeux important venant du développement choisi en e^6 au maximum (avec e^1 le nombre de jeux est de 1916).

En conclusion, nous pouvons dire que la théorie apporte une vision des perturbations dans l'espace des fréquences qui aide à choisir les développements nécessaires, par satellite, pour le champ de gravité.

A.3 Outil de propagation d'erreurs d'orbite

Principe (code)

Comme nous l'avons développé au Chapitre 3, le principe de la propagation d'erreurs commence par la définition de l'incertitude amont concernant les modèles. Plusieurs sources d'incertitudes, ou de signaux, de modèles sont envisagées ici, avec pour commencer les différences de coefficients de modèles géodynamiques. Il y a aussi la nécessité d'analyser les variations temporelles des coefficients par degré et ordre, de périodes essentiellement annuelles et semi-annuelles. Enfin, il y a le problème de la pression de radiation, pour lequel effet, nous avons développé un modèle d'erreur périodique.

Tous ces éléments concernant l'origine des erreurs se retrouvent en entrée d'un outil de calcul, dont le but est d'intégrer les effets en fonction du temps. Les équations du mouvement du satellite, et donc la solution analytique utilisent les valeurs des incertitudes plutôt que les coefficients des modèles.

```

Eltz Moyens-----!-Elements moyens orbitaux-----
001,flt,004      : Nbre de sat, Eltz moy(a3), NbreJours /filtrag orbit   (lec,flt/FLT

-----
Modele Analytique--!-----
rpl,00060.0      : Type eltz /propager Erreurs orbite, Pas               (rpl,elk
wrE,---         : Lecture ou sauveg. /fichier fmt orbito, Projection      (rdE/wrE, ter
043200.0        : Pas /... Eltz moyens                                   (Sec
N010-----     : Cle theo., degre max /seculr, var pot et drag          (W,w/K/C /N, d/D
C050050--Q05    : ... .. deg,ord max /perturb. gravit., e**Qmax         (K/C
00.0100,00.0100,00.0100,00.0100,00.0100,00.0100 : Amplit. jeux AEI      (m
00.0001,00.0001,00.0001 : ... RTN                                       (m
00.0100,010.0000 : Amplitude et Periode maxi /err d orbite             (m, j

-----
Origine Err-----!-----
varP, 1.0000     : Origine Erreurs dC/S_nm                               (simu(+echelle), diff, varP/T
---             : -> calcul des err /hauteurs de geode                  (wrH/---
P050050-----   : Cle champ de gravite                                  (P000000-----
Z50p50T50p50    : ... var seculr/period.(a,p) Zon. et Tesser.          (Z00p00T00p00
G025022027--    : Cles dCoeff. biais: -/G = dC_10,dCS_11              (0.1 mm
P047058-----   : Cles dCoeff. bruit: -/P = dCS_21                    (0.1 mm
11              : 10, 11 Mise a zero eventuelle /dCoeff                (1 ou 0
111             : 20, 21, 22
1111            : 30, 31, 32, 33
11111           : 40, 41, 42, 43, 44
111111          : 50, 51, 52, 53, 54, 55
1111111         : 60, ...
11111111        : 70, ...
111111111       : 80, ...
1111111111      : 90, ...
11111111111     : 100,101, ...

-----
FIN-----

```

FIGURE A.8 – Fichier de paramètres d'entrée pour le code de propagation analytique d'erreurs d'orbite.

Le code de propagation des erreurs est très proche du code de la propagation analytique d'orbite. La propagation des erreurs d'orbite prévoit l'utilisation d'un fichier de paramètres a priori (figure A.8) et la séquence de calculs suivants :

1. il faut nécessairement disposer d'une éphéméride existante ($\mathbf{x}(t)$, $\dot{\mathbf{x}}(t)$) afin d'en déduire des éléments orbitaux moyens. La théorie analytique démarre en effet avec (a_0, e_0, i_0 , etc.) ou

$(r'_0, \lambda'_0, i_0, \Omega_0)$ suivant sa nature. Un processus de filtrage des effets à courtes périodes de l'éphéméride, par variable, a donc été mis au point afin d'extraire à une date donnée les quantités moyennes recherchées.

L'éphéméride sert aussi de "support" aux calculs, mais sa précision n'est pas un problème en soit, puisque les coordonnées du satellite ne servent qu'à projeter les effets (erreurs et signaux) intégrés depuis le repère orbital local (R,T,N) dans un repère terrestre géocentrique ou un repère topocentrique donc local à une station d'observation.

2. la lecture (ou le filtrage) d'un jeu de paramètres orbitaux moyens :
 - lecture d'un bulletin moyen venant de l'extérieur.
 - filtrage local, sur 2 à 4 jours suivant l'altitude, de l'éphéméride (support) qui sert ensuite à la projection des erreurs : les quantités propagées. Le problème est de phaser les paramètres moyens de la théorie avec l'éphéméride de support. La propagation analytique des erreurs ou signaux implique en effet d'utiliser une orbite moyenne précessante (calculer en permanence les angles fondamentaux comme : Ω et $\omega + M$).
 - l'estimation des effets séculaires sur les angles, par l'analytique ou par régression linéaire sur les angles de l'éphéméride.
3. le calcul des amplitudes et fréquences des jeux, en injectant les erreurs des coefficients de modèles dans la solution analytique (plutôt que les coefficients eux-mêmes) ; ce calcul est limité par des amplitudes maximales par paramètre de la solution (e.g. $dr'_1, d\varphi'_1, d\lambda'_1$),
4. la propagation des éléments moyens (mouvement képlérien précessant) avec un grand pas (6h),
5. la propagation des erreurs d'orbite avec un pas fin (type 1min), et l'enregistrement des erreurs périodiques $dR, dT, dN = dr', r'_0.d\lambda', r'_0.d\varphi'$ ou encore $dR, dT, dN = da + a_0.de, a_0.(d(\omega + M) + d\Omega \cos i), a_0.(di + d\Omega \sin i)$

Un certain nombre de sous-programmes sont identiques entre les deux codes de propagation (orbite et erreurs d'orbite), avec un indice indiquant l'utilisation soit des coefficients soit des erreurs. C'est le cas des théories et des équations du mouvement (Lagrange ou coordonnées sphériques) qui sont écrites une seule fois. La sélection en excentricité s'effectue en amont, ce qui implique l'utilisation du jeu de variables et de la théorie correspondante.

La différence importante entre propagation d'orbite et d'erreurs, est donc l'origine du modèle. Dans le cas des orbites, nous lisons les coefficients, par exemple les coefficients géodynamiques du champ de gravité $C/S_{l,m}$ sur un fichier. Dans le cas des erreurs, l'organigramme A.9 montre qu'il faut estimer les $dC/S_{l,m}$ selon quelques possibilités, qui ont été expliquées dans le corps du texte au Chapitre 3 (voir aussi la figure A.8) :

- cas $U_1 - U_2$: lecture des deux modèles sur fichier, calcul des différences à la même date,
- cas U_{per} : extraction aux degré et ordre choisi (maximum des modèles, souvent au degré 50) des amplitudes annuelles et semi-annuelles :

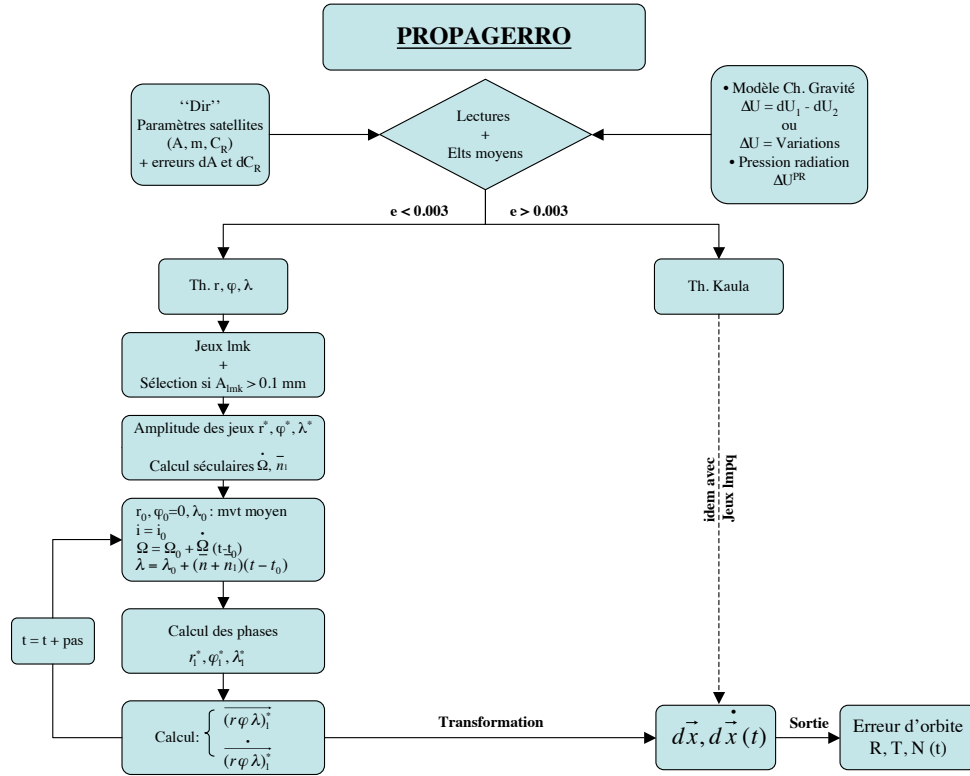


FIGURE A.9 – Organigramme de l'outil de propagation d'erreur

- pour chaque calcul de propagation d'erreurs effectué sur quelques jours (pas plus), les valeurs des coefficients sont estimées à la date moyenne demandée (milieu de l'arc).
- pour plusieurs calculs de propagation d'erreurs menés successivement sur une période de temps longue (1 an, etc.), les signaux annuels et semi-annuels sont donc conservés dans les coefficients.
- option “G” géocentre : des valeurs (en 0.1 mm dans le fichier de paramétrage) peuvent être injectées dans le calcul en considérant alors les coefficients géodynamiques $C_{1,0}$ et $C/S_{1,1}$ de période uniquement annuelle. La phase est prise à zéro début mars (voir Table A.2).

Une des conséquences de ce calcul est la nécessité de développer des fonctions d'inclinaison et tous les calculs des perturbations depuis le degré un.

Enfin, nous ne considérons aucune variation périodique résiduelle dans les coordonnées des stations impliquées dans la poursuite des satellites (donc dans le calcul des fonctions de mesures laser ou Doppler utilisées dans les calculs de transferts d'erreurs). Aussi, le mouvement du géocentre imposé aux coefficients géodynamiques, dans notre calcul, ne peut que représenter une sorte de signal résiduel voire d'erreur dont le calcul de transfert nous confirmera l'amplitude des impacts.

- option “P” coordonnées du pôle : contrairement au géocentre, les valeurs (en 0.1 mm dans

le fichier de paramétrage) des coordonnées du pôle utilisées pour calculer $C/S_{2,1}$ ne sont pas considérées ici en tant que biais (de période annuelle) constant sur la durée du calcul de la propagation (quelques jours).

Ici, l'idée est d'introduire un bruit pseudo-aléatoire à chaque grand pas de calcul (6h) au moment où toutes les amplitudes des jeux sont recalculées (voir Table A.2).

- sélection des harmoniques : compte tenu des analyses menées récemment sur les erreurs d'orbites résiduelles et la recherche, par l'étude de la fréquence résiduelle, de causes dans les coefficients du champ de gravité, il nous a semblé intéressant de proposer un coefficient (zéro ou un) à appliquer à chaque harmonique entre les degré et ordre un à 10. Nous avons pu isoler par exemple les effets de $C/S_{3,1}$.

TABLE A.2 – Valeurs adoptées pour les coefficient de bas degrés : origine (géocentre : amplitudes en mm à la période annuelle) et axe de figure (pôle : amplitude en μ seconde d'arc du bruit adopté).

Géocentre	val.	Pôle	\bar{x}_p^i	\bar{y}_p^i
$C_{10} : x$	2.5	C/S_{21}	0.	0.
$C_{11} : y$	2.2		100.	100.
$S_{11} : z$	2.7		0	0

Différences d'orbite, et modèles de champ

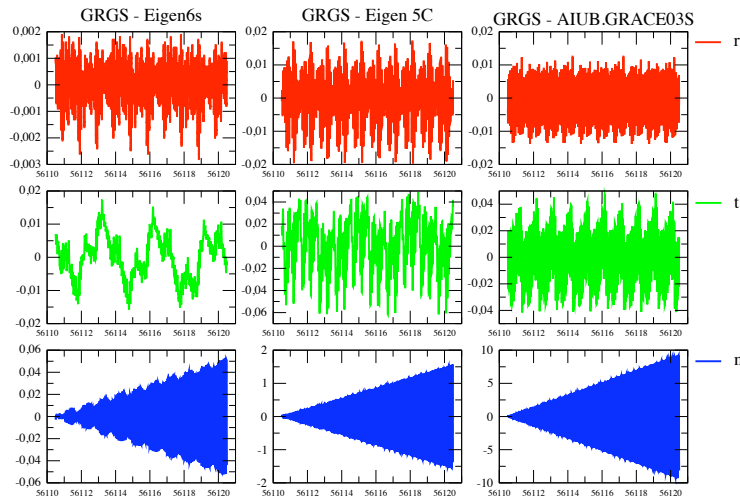


FIGURE A.10 – Différences (en m) d'orbite Jason-2 en comparant les modèle EIGEN-6S (à gauche), EIGEN-5C (au milieu) et AIUB-GRACE03S (à droite) avec EIGEN-GRGS.RL02bis.MEAN-FIELD.

Nous effectuons à titre d'exemple des comparaisons d'orbite avec les modèles EIGEN-6S,

EIGEN-5C et AIUB-GRACE03S par rapport à EIGEN-GRGS.RL02bis.MEAN-FIELD pour Jason-2 sur 10 jours (figure A.10) et Saral sur 3 jours (figure A.11).

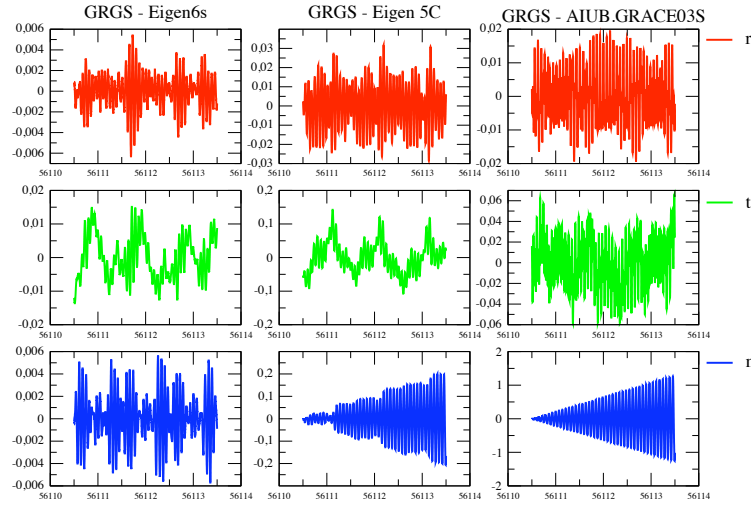


FIGURE A.11 – Différences (en m) d'orbite Saral en comparant les modèle EIGEN-6S (à gauche), EIGEN-5C (au milieu) et AIUB-GRACE03S (à droite) avec EIGEN-GRGS.RL02bis.MEAN-FIELD.

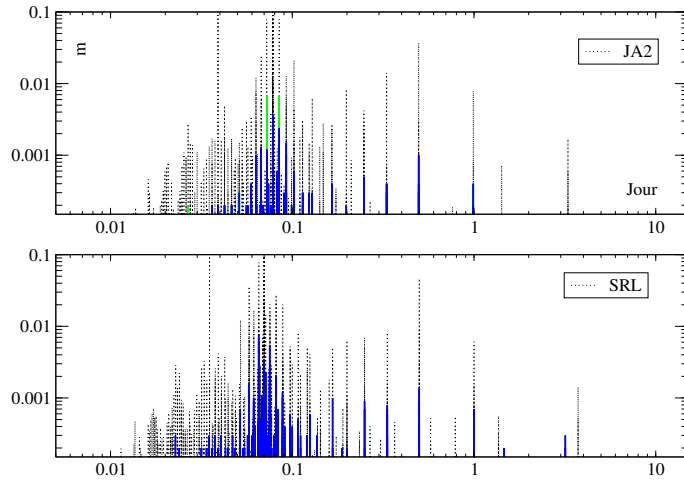


FIGURE A.12 – Amplitudes (en m) divisées par 1000 des perturbations (noir pointillé) et amplitudes d'erreurs radiales d'orbites (bleu) pour Jason-2 (JA2) et Saral (SRL), en fonction des périodes. En vert sur Jason-2, termes venant des coefficients $C/S_{3,1}$.

Les différences d'orbite sont exprimées dans les composantes radiale, tranverse et normale (R, T, N) en fonction du temps. La comparaison est au niveau du millimètre au centimètre sur les composantes R et T . Pour la composante N le niveau est de plusieurs décimètres ou même quelques mètres ; nous avons en fait un décalage séculaire en Ω entre les solutions (différences dans les harmoniques zonales paires), ce qui implique une différence périodique dont l'amplitude est linéairement toujours plus grande.

Les différences d'orbite entre les modèles de potentiel sont indiquées sur les figures [A.10](#) et [A.11](#) ; on constate que les différences, du même ordre de grandeur par variable, sont de structures (fréquences) très différentes. Avec Jason-2 comme avec Saral, ce sont des différences venant des coefficients tesséraux et/ou résonnants.

Nous avons donc comparé ces différences d'orbite avec des spectres de jeux équivalents. Comme nous le verrons plus loin, dans la propagation d'erreurs d'orbite, les différences de coefficients géodynamiques entre deux modèles $U1$ et $U2$ ($dC/S = C/S_{l,m}^{U1} - C/S_{l,m}^{U2}$) deviennent les coefficients de la théorie. La figure [A.12](#), notamment pour l'orbite de Saral, indique effectivement des signaux orbitaux de périodes un jour et plus qui proviennent des différences entre EIGEN-5C et EIGEN-GRGS.RL02bis.MEAN-FIELD (voir figure [A.10](#)).

Sur cette figure, dans le cas de Jason-2, on indique également les termes orbitaux (erreurs) venant des différences avec ou sans les coefficients ($C/S_{3,1}$) ; on constate qu'il occupent une place importante relativement aux autres coefficients. Nous analysons la situation au Chapitre 4.

A.4 Outil de calcul des transferts d'erreurs

Nous avons vu que la méthode d'analyse d'erreurs développée dans le cadre de ce travail de thèse est dite "descendante". C'est-à-dire qu'elle démarre avec plusieurs causes d'erreurs situées dans les modèles dynamiques, puis calcule leur propagation dans le temps et l'espace. A partir de ce premier calcul, nous avons choisi le transfert des quantités calculées par projection sur plusieurs types de fonction de mesure :

- l'altimétrie par satellite,
- les mesures de poursuite de satellite, distances et vitesses radiales, correspondant à la télémétrie laser et au Doppler-DORIS.

```

Satellite-----!-----
001,---          : Numero satell. (0: tous), Graph Pasg          (wrt/---
-----
Origine & Cible---!-----
b---M2pth--:M      : M esure                                     (bBT0iMipth-W
X---Bc7-----:      : R epere                                     (XCV-Bc5-----
R-P25-----:0      : O rbite                                     (R-P01-----
X---7-----:A      : A justement Parametres /Station          (XBTi7-----
-----
Mesures Laser-----!-----
--3           : PN(0=FR) ou PN(1->9): Pts Normaux /--i: pas de mesures laser
020,80        : nbre stations (ou 0: tout), Elevation maxi (DEG
1824 X--      : Golosiiv
1868,X--      : Komsomolsk
1893 X-T      : Katzively
7080 X--      : Mac-Donald
7090 XB-      : Yaragadee
-----
Mesures Doris-----!-----
DP0,---       : DP(0=10sec) /--i: pas de mesures), Type mdl Freq bord: lec/---
0.0000,00.0000 : Modele /Freq bord
046           : nbre stations (ou 0: tout)
TLSA          : Toulouse
PAPB          : Papeete
RAQB          : Rapa
CHAB          : Chatam
STJB          : St John's
KRUB          : Kourou
CACB          : Cachoeira
PDLB          : Sao-Miguel
REYA          : Reykjavik
SPIA          : Ny-Alesund

```

FIGURE A.13 – Fichier de paramètres d'entrée pour le code de transfert d'erreurs vers les repères au sol.

Le but est donc de calculer des cartes géographiques, où l'on regardera essentiellement les implications des erreurs d'orbite, dans l'espace mais aussi dans le temps : donc les erreurs géographiquement corrélées dont l'amplitude et la répartition spatiale peuvent évoluer lentement dans le temps. Le but est aussi, de manière complémentaire, de calculer des séries de coordonnées X_j de points j au sol (en fait uniquement les appoints dX_j) dont chaque jeu (une station et ses 3 coordonnées géocentriques) aura intégré les erreurs d'orbite de la trajectoire considérée (erreurs calculées en amont) et les erreurs de mesures (estimées par type) sur des périodes de temps raisonnables, d'environ 7 jours.

Pour des raisons d'études, nous avons également prévu d'introduire, a priori, des erreurs sur les coordonnées des stations X_j et sur leur éventuel décalage en temps (1 à 2 μ secondes) par station j ou globalement. Dans ce dernier cas, on introduit une erreur pseudo-aléatoire sur toutes les coordonnées du réseau considéré.

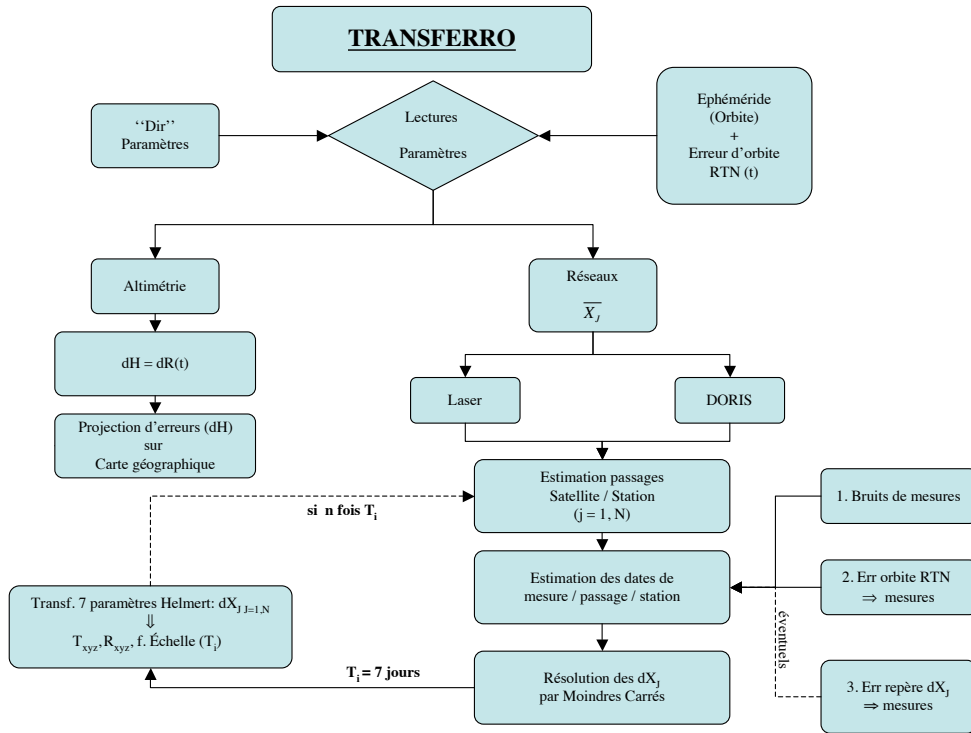


FIGURE A.14 – Organigramme de l'outil de transfert d'erreurs

Le code réalisé (organigramme A.14) s'appuie sur un fichier de paramétrage donné figure A.13. Les origines d'erreurs possibles ou prévues sont de types : "Mesure", "Repère", et "Orbite". Les mesures et réseau correspondants sont choisis soit globalement (7 paramètres d'Helmert) soit par station (numéro station ou code balise).

Orbite

Le calcul démarre avec deux données essentielles : 1/ la trajectoire du satellite étudié $(\bar{x}, \dot{\bar{x}})(t)$ (position et vitesse géocentriques soit dans un repère inertiel soit en repère terrestre : ceci dépend de l'origine du calcul), et 2/ les erreurs d'orbite calculées en amont $d[E](t)$ ou $d[r', \varphi', \lambda'](t)$, suivant les variables intégrées par les théories analytiques programmées.

La propagation d'erreurs d'orbite effectuée en amont permet d'estimer $(d\bar{r}, d\dot{\bar{r}})(t)$; avec $d\bar{r}$ les composantes R, T, N (dites radiale, transverse (selon la vitesse), normale) locales à la trajectoire à chaque instant. Ensuite, grâce à la trajectoire dite de support, on calcule les projections sur les

mesures suivantes : $H(t)$, la mesure de distance par altimétrie radar (satellite-surface de la mer), $\rho(t)$ la mesure de distance par télémétrie laser station-satellite, ou encore $\dot{\rho}(t)$ la mesure de vitesse radiale station-satellite type DORIS.

Sauf dans le cas de l'altimétrie (mesure H), nous projetons ces erreurs locales à la trajectoire dans le repère terrestre géocentrique, par la donnée des vecteurs $(\bar{x}, \dot{\bar{x}})$, grâce aux formules de transformation utilisées en orbitographie : $O = [XYZ - RTN]$ et inversement. Ces projections sont estimées à partir des dérivées partielles décrites au Chapitre 3.

Mesures

Nous allons décrire ci-dessous les développements effectués (codes) dans le cadre des transferts d'erreurs d'orbite vers les mesures sol-satellite puis, dans le cas des mesures de poursuite, vers les coordonnées des stations. On admettra, avec les expressions données au Chapitre 3 :

$$dH = dr' + dH_{\text{instrument}} \quad (\text{A.5})$$

$$d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial \bar{x}} [O \cdot d\bar{r}] + d\rho_{\text{instrument}} \quad (\text{A.6})$$

$$d\dot{\rho} = \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \bar{x}} [O \cdot d\bar{r}] + \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \dot{\bar{x}}} [O \cdot d\dot{\bar{r}}] + d\dot{\rho}_{\text{instrument}} \quad (\text{A.7})$$

Altimétrie. C'est la seule fonction de mesure pour laquelle nous choisissons de ne pas ajouter d'erreur à chaque mesure. En fait, nous voulons analyser la propagation des erreurs d'orbite qui sont aujourd'hui de très faibles quantités par rapport au bruit instantané du radar ou de l'altimétrie en général : il y a probablement un facteur >3 entre l'amplitude de l'erreur radiale moyenne (quelques mm ou moins) et le bruit de mesure instrumentale de 15 mm environ.

Il ne serait donc pas efficace, et même complexe, d'ajouter un bruit de mesure "altimètre" dans nos analyses puis d'avoir ensuite à le filtrer pour dégager les seuls signaux résiduels d'erreurs géographiquement corrélées. Or, c'est pourtant ce que les analystes font effectivement avec les mesures radar au plan opérationnel ; nous admettrons ici que les erreurs instrumentales de l'altimétrie sont de moyenne spatiale nulle, ce qui est certainement à étudier en pratique.

Enfin, le transfert d'erreur (orbite vers fonction de mesure H) est effectué exactement au pas fin utilisé pour la propagation d'erreurs d'orbite, soit 30 sec à 1 minute. Dans le cas de Jason-2, par exemple, compte tenu de sa période de répétitivité de 10 jours, la propagation d'erreur est donc menée sur 10 jours ce qui établit une résolution de 360 km le long de la trace (environ 1 minute) et d'environ 340 km en longitude ; il y a donc beaucoup moins de mesures simulées dans nos analyses que dans le cas opérationnel, avec une cadence de 1 seconde, mais nous n'avons aucun bruit de

mesure.

Distance laser. Les mesures de télémétrie laser sont d’une grande exactitude par rapport aux systèmes micro-ondes. Cependant, il existe encore des incertitudes de ± 1 cm et moins, et surtout une assez grande disparité entre les technologies utilisées au sol (environ 30-35 stations sont actives actuellement).

Contrairement à l’altimétrie, nous avons choisi d’inclure des erreurs de mesure sol-satellite (bruit blanc et systématisme par station) dans nos analyses liées aux transmissions d’erreurs sur les repères de référence. Le travail de filtrage de ces erreurs se fera simplement dans le temps et l’espace puisqu’il faut bien plusieurs passages, sur plusieurs jours, afin d’ajuster un jeu d’appoints de coordonnées au sol, à partir d’orbites telles que LAGEOS (6000 km d’altitude). L’estimation opérationnelle d’appoints de coordonnées au sol en plus des paramètres de la rotation terrestre est effectuée par les centres d’analyse de l’ILRS ; cela implique une période de référence de 7 jours, ce que nous avons choisi.

Le bruit de mesure est estimé par station à partir de son propre bruit (détecteur et largeur de pulse laser) et sa propre cadence de tir (entre 5 et 1000 Hz). Ce bruit est ensuite re-estimé à partir de la largeur de l’estimation du point normal, de la cadence du laser utilisé et du tau de retour des impulsions (en simple photo-électron le tau d’acquisition tombe à 10% et moins). On considère donc que la précision du PN diminue en \sqrt{n} , n étant le nombre de mesures brutes sur l’intervalle considéré. Concernant les biais en distance et en temps, par station, nous n’avons pas activé cette fonction pour les analyses décrites au Chapitre 4. La Table A.3 résume les quantités ci-dessus, par station laser ou groupe de stations. Les 7 stations MOBLAS américaine sont en effet très similaires ayant été développées avec la même technologie. La station anglaise (Herstmoceux) représente les stations avec des laser kilo-Hz (comme Graz, en Autriche). Les autres stations indiquées (Grasse, Wettzell et Koganei) sont des exemples de technologies un peu différentes.

Dans la même idée, le volume des PN est créé en fonction du scénario (1 à 4) choisi pour chaque station.

Enfin dans le même esprit, nous avons également pris en compte, à titre d’erreur sur la correction de propagation atmosphérique, des quantités mesurées suivantes : la pression P , la température T et l’humidité h de l’air au moment du passage laser. Nos analyses d’erreurs ne s’appuient pas sur des “observées-calculées” ; il faut donc injecter des sources d’erreurs réalistes dans notre système, ce que nous faisons ici à partir d’une évaluation raisonnable des erreurs de mesures sur les paramètres d’environnement (P, T, h) : avec $dP = 0.1\text{mB}$, $dT = 0.1\text{K}$, et $dH = 5\%$.

Nous avons ajusté ces hypothèses de calcul (scénarios, bruits, etc.) par la donnée des informations technologiques disponibles à l’ILRS. Le bruit des PN sur les satellites LAGEOS va de < 1 mm à 5-6 mm ; pour Jason-2, avec des PN construits sur 15 secondes, le bruit va de 1-2 mm (station Yaragadee AUS) à 10-12 mm (station Ukraine) pour les technologies laser les moins performantes.

TABLE A.3 – Précision adoptée par type de station laser, sur les Points Normaux (PN) ; ceci dépend de la cadence du laser, du mode simple ou multi-photons adopté, et de la durée sur laquelle le PN est calculé (15 à 300 sec.).

station	Laser (ps)	Bruit (mm) "single shot"	Mesure (PN) (valeur adoptée)
MOBLAS	100	30.	4.
Grasse	150	45.	6.
Herstmonceaux	25	7.5	1.
Koganei	70	21.	3.
Wettzell	35	10.	2.

Ceci est conforme aux résultats des analystes.

Vitesse radiale. Les mesures de vitesse radiale, dans le cas de DORIS, sont en fait issues de mesures de temps de comptage (sur 10 s) d'un signal de différence de deux fréquences. Le signal Doppler issu de la mesure est donc perturbé par les stabilités et les biais de fréquence des oscillateurs au sol (émission) et à bord (réception).

Des analyses d'erreur effectuées dans le cadre de Jason-1 [Willis et al. \(2004\)](#) ont montré la relation entre erreur de fréquence et erreur de vitesse radiale. Les analystes de l'IDS ont également vérifié que le seuil bas des analyses d'orbite atteint un résidu de 0.3 mm/sec, ce qui correspond à $\delta f/F_0 = 10^{-12}$ environ, avec $F_0 = 2$ Ghz. Enfin, les caractéristiques récentes de l'oscillateur bord DORIS de Jason-2 donnent des signaux de l'ordre de plusieurs 10^{-13} , [Belli et al. \(2015\)](#) ; ces signaux déterministes (température et radiations) ne sont pas pris en compte pour le moment par l'IDS, en dehors de Jason-1 et de SPOT-5 qui ont des signaux plus forts, [Lemoine and Capdeville \(2006\)](#); [Stepánek et al. \(2010\)](#).

Nous avons donc pris en compte une erreur dite de laboratoire de 0.2 mm/sec, [Jayles et al. \(2015\)](#), pour chaque balise du réseau DORIS, sans ajouter de biais de fréquence ni au sol ni à bord ; mais ce sera une technique à tester.

Aspects statistiques

Dates des mesures. Pour la vitesse radiale, avec une cadence d'acquisition du Doppler DORIS à environ 10 secondes, nous avons uniquement considéré un taux global de 85% entre cadence théorique et cadence réalisée effectivement. Les dates se succèdent donc de manière pseudo-aléatoire, mais assez régulièrement. Il n'y a pas de différence entre balises.

Concernant la distance (basée sur la télémétrie laser), nous proposons tout d'abord un calcul de la répartition théorique des dates de mesures par passage à la cadence fixée par l'ILRS qui dépend

du satellite (ex : pour Jason-2 les données sous la forme de points normaux (PN) sont calculées toutes les 15 secondes, alors que pour LAGEOS les PN sont édités à 120 secondes. Nous nous fixons ensuite un tau d'acquisition (valable par station, et paramétré selon 4 scénarios possibles, du plus dense au moins dense) qui est utilisé pour calculer le nombre de mesures réalisées effectivement par passage et aussi pour calculer puis sélectionner le nombre de passages réalisés. Les dates des mesure retenues sont donc choisies aléatoirement à partir des dates théoriques (cadence ILRS) et à partir du tau utilisé par station ; les passages également.

Instruments au sol. Le réseau laser considéré est donné par la solution de l'ITRF 2008 ; nous avons sélectionné 20 stations (voir la figure A.15). Mais, puisqu'il s'agit de faire une analyse d'erreur (aspect différentiel), les coordonnées X_j ne sont utilisées que pour calculer les dérivées partielles qui servent de support aux transferts des erreurs. Les erreurs instrumentales sont paramétrables par station, puisqu'il faut tenir compte des disparités entre les laser utilisés.

Le réseau DORIS considéré est également issu de l'ITRF 2008 ; nous avons sélectionné 46 balises (voir la figure A.16). Toutes les stations DORIS sont considérées comme uniformes (on peut cependant paramétrer par station/balise) au plan instrumental. Un signal d'erreur très faible, de l'ordre de quelques 10^{-13} en fréquence relative venant de l'oscillateur bord de Jason-2, a cependant été ajouté.

Laser : météo & saisons. Concernant le réseau laser, nous avons défini un certain nombre de cas statistiques (4 au total) qui permettent de moduler le nombre de passages et d'observations par passages, a priori. Les stations sont cataloguées en très productives, productives, moins productives, etc. En outre, ce système de sélection aléatoire des passages et des mesures (on produit un taux d'observation τ_j^p par passage p), est contraint par les saisons (τ dispose d'un terme annuel phasé avec les saisons).

Nous verrons dans les résultats de quelques tests, notamment par station, que l'impact des variations spatio-temporelles des mesures laser est à la mesure de ce que les analystes ont produit ces dernières années.

Repère

A l'aide des dérivées partielles des mesures station-satellite ρ et $\dot{\rho}$, par rapport aux coordonnées X_j de chaque station j d'un réseau, nous avons implanté les équations présentées au Chapitre 3, dans le code présent. Ceci permet de calculer le transfert des erreurs dX_j des coordonnées de station, sur les mesures.

Ici, notre but est de construire une analyse “descendante” des erreurs d'orbite, avec leurs conséquences notamment sur le repère terrestre. Aussi, nous n'utiliserons pas cette option afin de ne pas mélanger les sources d'erreurs de type dX_j sur les coordonnées des stations, avec les

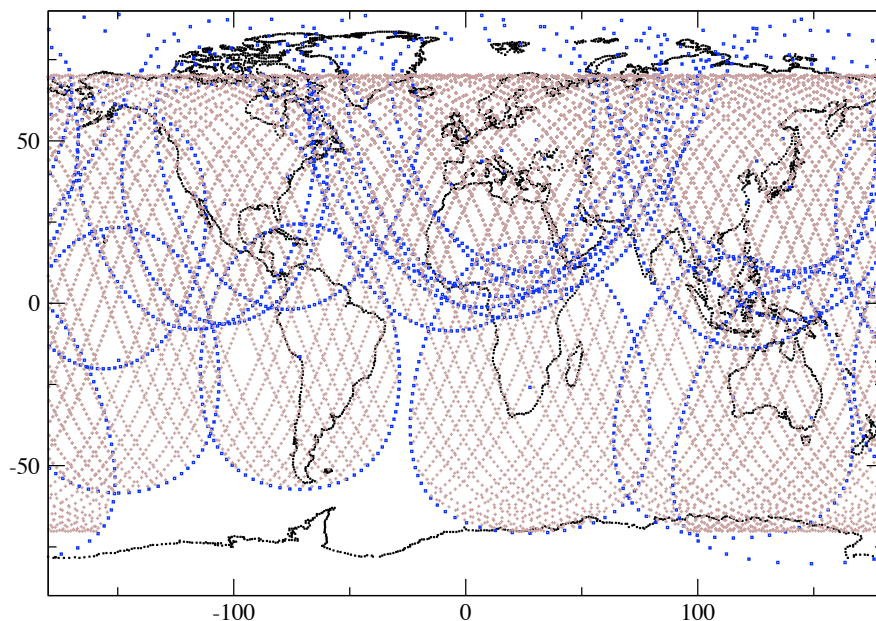


FIGURE A.15 – Traces au sol des visions de stations Laser sélectionnées pour une période de sept jours de l'orbite LAGEOS-1

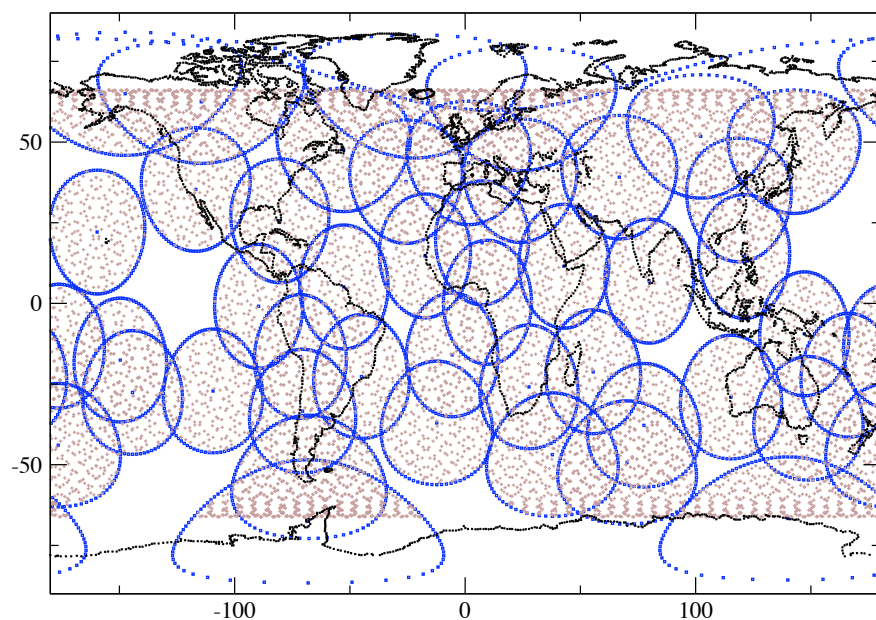


FIGURE A.16 – Traces au sol des visions des stations DORIS sélectionnées ; période de sept jours de l'orbite Jason-2.

conséquences, sur le repère, des sources d'erreurs étudiées ici : orbite et mesures. Ces conséquences seront donc estimées par injection des erreurs d'orbite et de mesures $d\rho$ et $d\dot{\rho}$ par passage ; celles-ci seront ensuite cumulées par station sur une période de temps de quelques jours : 7 jours en général, compte tenu des périodes utilisées par les services internationaux IDS-DORIS et ILRS-laser pour ajuster les repères.

Nous ne pouvons donc, dans le cadre de ce travail d'analyse analyser l'impact du seul dispositif opérationnel au sol sur la qualité des orbites. En effet, surtout pour le laser, les mesures sont de nature optique et sont donc très affectées (en quantité plus qu'en qualité) par la qualité de ciel, les nuages, etc. à chaque passage. Le réseau laser, contrairement à celui de DORIS, n'est pas bien réparti à la surface du globe. La stabilité de l'ensemble a été étudié par les analystes, comme une source non négligeable de problèmes. Les effets de réseau, par exemple, ont été étudiés par [Collilieux et al. \(2009\)](#), mais plusieurs auteurs ont également regardé l'impact de la répartition spatio-temporelle des données laser sur les trajectoires (essentiellement LAGEOS, pour l'ILRS).

Enfin, la stabilité des solutions ($dX_j, j = 1, N$) à 7 jours, est analysée plus globalement ensuite car chacune est "transportée" dans le même repère par une transformation 3D à 7 paramètres. L'ensemble des coefficients, sur une grande période de temps (1 an ou plus), nous donne alors une bonne idée de l'instabilité de l'ensemble du réseau.

Table des figures

3.1	Illustration NASA concernant la mission spatiale GRACE Follow-On (voir le site http://gracefo.jpl.nasa.gov/).	45
3.2	Réseau des stations laser de l'ILRS, et traces du satellite Jason-2 toutes les 15 sec., à partir d'une élévation minimale de 20 degrés en station Pearlman et al. (2002).	51
3.3	Réseau de stations DORIS de l'IDS, et traces du satellite Jason-2 toutes les 10 sec., à partir d'une élévation minimale de 20 degrés en station Tavernier et al. (2005).	53
4.1	Illustration des différences de modèles (aux degrés et ordres 2 à 50), en terme de hauteur de géoïde (en m).	57
4.2	Illustration des variations périodiques du modèle EIGEN-GRGS.RL02MF, du 02 Jul 2012 au 02 Déc 2012, en terme de hauteur de géoïde (en m).	58
4.3	Illustration de la variabilité des modèles mensuels EIGEN-GRGS.RL03V1 de Jul 2012 à Jul 2013, de hauteur de géoïde (en m).	59
4.4	Illustration de l'effet de géocentre et de pôle, en terme de hauteur de géoïde (en m); le signal injecté dans les coefficients HS de degré un est d'une amplitude totale de 0.012 m; mais l'échelle de couleurs utilisées a tendance a surdimensionner cette valeur.	59
4.5	Traces au sol, sur une journée, des orbites (a) : Jason2 -bleu et Saral -marron et (b) : Lageos1 -violet et Lageos2 -vert.	62
4.6	Amplitudes (en m) et périodes (en jour) des erreurs d'orbite Jason-2 (a) et Saral (b) provenant des différences de modèles.	63

4.7	Erreurs radiales géographiquement corrélées (en m) pour Jason-2 sur 10 jours (a) et Saral sur 15 jours (b) dues à la différence de modèle EIGEN-GRGS.RL02MF – EIGEN-6S en haut et –EIGEN-5C en bas. En m ; les échelles en bas sont un peu différentes.	65
4.8	Erreurs radiales géographiquement corrélées (en m) pour Jason-2 sur 10 jours dues aux variations périodiques de EIGEN-GRGS.RL02MF du 02 Jul 2012 au 02 Déc 2012.	67
4.9	Erreurs radiales géographiquement corrélées (en m) pour Saral sur 15 jours dues aux variations périodiques de EIGEN-GRGS.RL02MF du 01 Jul 2013 au 01 Déc 2013.	67
4.10	Erreurs radiales géographiquement corrélées (en m) dues aux modèles mensuels EIGEN-GRGS.RL03V1 pour Jason-2 sur 10 jours (Jul 2012 à Jul 2013).	68
4.11	Erreurs radiales géographiquement corrélées (en m) dues aux modèles mensuels EIGEN-GRGS.RL03V1 pour Saral sur 15 jours (Oct 2013 à Jun 2014).	68
4.12	Erreurs radiales géographiquement corrélées (en m) dues au géocentre (degré 1) & pôle (degré 2) sur l'orbite Jason-2	69
4.13	Erreurs radiales d'orbite (a) : Jason, (b) : Saral présentées par déviation standard des coefficients HS individuels, et (c) : l'impact des erreurs radiales d'orbite Jason-2 sur la surface moyenne de la mer, d'après Couhert et al. (2014).	70
4.14	Erreurs radiales d'orbite (en m) pour Jason-2 dues au coefficient C/S_{31} , venant de la différence entre EIGEN-GRGS.RL02.MF et EIGEN-6S (sans et avec C/S_{31} , respectivement)	71
4.15	Carte globale des balises DORIS, http://ids-doris.org/images/world_map_doris.jpg	76
4.16	Conséquence sur les paramètres instantanés de transformation globale, des transfert d'erreurs de mesure (cercle-noir) Doppler type DORIS, de mesure-orbite (carré-rouge) et de mesure-orbite sans effet de géocentre & pôle (diamant-bleu) ; T_{xyz} en m et R_{xyz} en milli-arc-sec ; basé sur 1 an d'orbite de Jason-2	77
4.17	Conséquence des erreurs (en m) de mesure (cercle-noir), des mesure-orbite (carré-rouge) et de mesure-orbite sans effet de géocentre & pôle (diamant-bleu) sur les coordonnées des stations Yellowknife-40127, Metsahovi-10503 et Badary-12338 situé à l'hémisphère nord	78

4.18	Conséquence des erreurs (en m) de mesure (cercle-noir), des mesure-orbite (carré-rouge) et de mesure-orbite sans effet du géocentre & pôle (diamant-bleu) sur les coordonnées des stations Rio-Grande-41507, Marion-Island-30313 et Terre-Adelie-91501 situé à l'hémisphère sud	79
4.19	Conséquence des erreurs (en m) de mesure (cercle-noir), des mesure-orbite (carré-rouge) et des mesure-orbite sans effet du géocentre & pôle (diamant-bleu) sur les coordonnées des stations Arequipa-42202, Libreville-32809 et Manille-22006 situé autour l'équateur	79
4.20	Conséquence sur les paramètres instantanés de transformation pour les cas d'erreur de mesure (cercle-noir), de mesure-orbite (carré-rouge) et de mesure-orbite sans effet de géocentre & pôle (diamant-bleu) ; T en m et R en mas.	82
4.21	Conséquence des erreurs (en m) de mesure (cercle-noir), des mesure-orbite (carré-rouge) et des mesure-orbite sans effet du géocentre- pôle (diamant-bleu) sur les coordonnées des stations de réseau Laser	82
A.1	Fichier de paramètres d'entrée pour le code de propagation analytique d'orbite. . . .	93
A.2	Organigramme de l'outil de propagation d'orbite	94
A.3	Différences (en m) entre théorie circulaire et intégration numérique pour l'orbite (a) : Jason-2 et (b) : Saral	95
A.4	Différence (en m) entre théorie de Kaula et intégration numérique pour les orbites LAGEOS-1 & 2, respectivement.	96
A.5	Différences (en m) (avec et sans pression de radiation solaire directe) pour la théorie de Kaula (traits fins) et l'intégration numérique (traits d'amplitude croissante) pour une orbite type Jason (altitude et inclinaison, mais avec $e = 0.004$).	96
A.6	Périodes des perturbations radiales (en m) des orbites Saral et Jason calculées à partir du modèle EIGEN-GRGS.RL02bis.MEAN-FIELD jusqu'au degré et ordre 50.	97
A.7	Périodes des perturbations radiales (en m) des orbites LAGEOS-1 et -2 calculées à partir du modèle EIGEN-GRGS.RL02bis.MEAN-FIELD jusqu'au degré et ordre 20.	97

A.8 Fichier de paramètres d'entrée pour le code de propagation analytique d'erreurs d'orbite.	99
A.9 Organigramme de l'outil de propagation d'erreur	101
A.10 Différences (en m) d'orbite Jason-2 en comparant les modèle EIGEN-6S (à gauche), EIGEN-5C (au milieu) et AIUB-GRACE03S (à droite) avec EIGEN-GRGS.RL02bis.MEAN-FIELD.	102
A.11 Différences (en m) d'orbite Saral en comparant les modèle EIGEN-6S (à gauche), EIGEN-5C (au milieu) et AIUB-GRACE03S (à droite) avec EIGEN-GRGS.RL02bis.MEAN-FIELD.	103
A.12 Amplitudes (en m) divisées par 1000 des perturbations (noir pointillé) et amplitudes d'erreurs radiales d'orbites (bleu) pour Jason-2 (JA2) et Saral (SRL), en fonction des périodes. En vert sur Jason-2, termes venant des coefficients $C/S_{3,1}$	103
A.13 Fichier de paramètres d'entrée pour le code de transfert d'erreurs vers les repères au sol.	105
A.14 Organigramme de l'outil de transfert d'erreurs	106
A.15 Traces au sol des visions de stations Laser sélectionnées pour une période de sept jours de l'orbite LAGEOS-1	111
A.16 Traces au sol des visions des stations DORIS sélectionnées ; période de sept jours de l'orbite Jason-2.	111

Liste des tableaux

2.1	Missions spatiales récentes pour la gravimétrie.	8
2.2	Modèles ($GM = 398600. \text{ km}^3.s^{-2}$)	9
2.3	Résidus de calculs d'orbites selon différents auteurs, dont Bruisma, Bonnefond, Lemoine, selon différents modèles ou solutions de repère.	12
2.4	Estimation récentes des repères par techniques (en mm) et importance des co-locations de techniques (Journée GRASP, CNES, Paris 2014).	18
2.5	Techniques satellites.	19
2.6	Futur GGOS (IAG, Munich 2006)	21
4.1	Ecarts-types des différences d'orbite (sur les composantes <i>RTN</i>) de Jason-2, en mm, entre les modèles considérés ; sélection des jeux perturbatifs $> 0.1 \text{ mm}$	62
4.2	Conséquences des erreurs de mesures (PN), d'orbite et de repère ; cas laser avec Jason-2, sur 7 jours.	74
4.3	Conséquences des erreurs de mesures (vit. radiale), d'orbite et de repère ; cas Doppler-DORIS avec Jason-2, sur 7 jours.	75
4.4	Les différents sources d'erreurs sur les mesures laser ; PN : Points Normaux calculés par une moyenne toutes les 120 secondes, à partir des paramètres technologiques de chaque station.	80
4.5	Les différents cas : conséquences sur la sensibilité du repère laser aux erreurs de mesures, et d'orbite (plus repère pour test), selon les trois cas (1,2,3) ; valeurs en mm et $\mu\text{sec. d'arc}$	80

- A.1 Valeurs des jeux résonnants (amplitude Radiale en m et Périodes en jours) pour le potentiel de gravité; limite de sélection des jeux à 0.01 m sur R, T et N; (d,o) : degré et ordre. 98
- A.2 Valeurs adoptées pour les coefficient de bas degrés : origine (géocentre : amplitudes en mm à la période annuelle) et axe de figure (pôle : amplitude en μ seconde d'arc du bruit adopté). 102
- A.3 Précision adoptée par type de station laser, sur les Points Normaux (PN); ceci dépend de la cadence du laser, du mode simple ou multi-photons adopté, et de la durée sur laquelle le PN est calculé (15 à 300 sec.). 109

Bibliographie

- Altamimi, Z., Collilieux, X., and Métivier, L. (2011). ITRF2008 : an improved solution of the international terrestrial reference frame. *Journal of Geodesy*, 85(8) :457–473.
- Auriol, A. and Tourain, C. (2010). DORIS system : the new age. *Advances in space research*, 46(12) :1484–1496.
- Balmino, G. and Perosanz, F. (1995). Comparison of geopotential recovery capabilities of some future satellite missions. In *Gravity and Geoid*, pages 403–412. Springer.
- Balmino, G., Schrama, E., and Sneeuw, N. (1996). Compatibility of first-order circular orbit perturbations theories ; consequences for cross-track inclination functions. *Journal of Geodesy*, 70(9) :554–561.
- Bar-Sever, Y. and Kuang, D. (2003). New empirically-derived solar radiation pressure model for GPS satellites. In *EGS - AGU - EUG Joint Assembly*, page 3248.
- Belli, A., Exertier, P., Samain, E., Courde, C., Vernotte, F., Auriol, A., and Jayles, C. (2015). Characterization of an ultra stable quartz oscillator thanks to Time Transfer by Laser Link (T2L2, Jason2). In *Proceedings of the EFTF & International Frequency Control Symposium (EFTF/IFC) 2015, Denver Colorado, US*, pages 808–812.
- Bertiger, W., Desai, S., Dorsey, A., Dorsey, A., Garcia-Fernandez, M., Haines, B., Landerer, F., Sibois, A., Wiese, D., and Dah-Ning, Y. (2014). Time-Variable Gravity, Geocenter and Jason-2 Orbit Determination With GPS. In *OSTST*.
- Bertiger, W., Desai, S., Dorsey, A., Haines, B., Landerer, F., Wiese, D., and Dah-Ning, Y. (2013). Precision Orbit Determination For Jason-2 With GPS. In *OSTST*.

- Beutler, G., Brockmann, E., Gurtner, W., Hugentobler, U., Mervart, L., Rothacher, M., and Verdun, A. (1994). Extended orbit modeling techniques at the CODE processing center of the international GPS service for geodynamics (IGS) : theory and initial results. *Manuscr. Geod.*, 19 :367–386.
- Bois, E. (1992). First-Order accurate theory of perturbed circular motion. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, page 133.
- Bonnefond, P., Exertier, P., Laurain, O., Guillot, A., Picot, N., Cancet, M., and Lyard, F. (2015). SARAL/AltiKa Absolute Calibration from the Multi-Mission Corsica Facilities. *Marine Geodesy*.
- Bonnefond, P., Exertier, P., Schaeffer, P., Bruinsma, S., and Barlier, F. (1995). Satellite altimetry from a short-arc orbit technique : Application to the Mediterranean. *Journal of Geophysical Research : Oceans (1978–2012)*, 100(C12) :25365–25382.
- Cerri, L., Berthias, J., Bertiger, W., Haines, B., Lemoine, F., Mercier, F., Ries, J., Willis, P., Zelensky, N., and Ziebart, M. (2010). Precision orbit determination standards for the jason series of altimeter missions. *Marine Geodesy*, 33(S1) :379–418.
- Chao, B. F., Dehant, V., Gross, R., Ray, R., Salstein, D., Watkins, M., and Wilson, C. (2000). Space geodesy monitors mass transports in global geophysical fluids. *Eos, Transactions American Geophysical Union*, 81(22) :247–250.
- Collilieux, X., Altamimi, Z., Coulot, D., Ray, J., and Sillard, P. (2007). Comparison of very long baseline interferometry, GPS, and satellite laser ranging height residuals from ITRF2005 using spectral and correlation methods. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, 112(B12). B12403.
- Collilieux, X., Altamimi, Z., Ray, J., van Dam, T., and Wu, X. (2009). Effect of the satellite laser ranging network distribution on geocenter motion estimation. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth (1978–2012)*, 114(B4).
- Couhert, A., Cerri, L., Legeais, J.-F., Ablain, M., Zelensky, N. P., Haines, B. J., Lemoine, F. G., Bertiger, W. I., Desai, S. D., and Otten, M. (2015). Towards the 1 mm/y stability of the radial orbit error at regional scales. *Advances in Space Research*, 55 :2–23.

- Couhert, A., Jalabert, E., Mercier, F., Hautesserres, D., Rios-Bergantinos, S., and Houry, S. (2014). Long-term analysis of possible remaining sources of orbit error. In *OSTST*.
- Coulot, D. (2005). *Satellite Laser Ranging and combination of geodetic techniques. Contributions to terrestrial reference systems and applications*. Thèse, Observatoire de Paris.
- Courde, C. (2015). Le développement des stations SLR en vue de l'exactitude millimétrique. In *Séminaire Géodésie Millimétrique*.
- Exertier, P. and Bonnefond, P. (1997). Analytical solution of perturbed circular motion : application to satellite geodesy. *Journal of Geodesy*, 71(3) :149–159.
- Förste, C., Bruinsma, S., Shako, R., Abrikosov, O., Flechtner, F., Marty, J.-C., Lemoine, J.-M., Dahle, C., Neumeyer, H., Barthelmes, F., et al. (2012). A new release of EIGEN-6 : The latest combined global gravity field model including LAGEOS, GRACE and GOCE data from the collaboration of GFZ Potsdam and GRGS Toulouse. In *EGU General Assembly Conference Abstracts*, volume 14, page 2821.
- Förste, C., Flechtner, F., Schmidt, R., Stubenvoll, R., Rothacher, M., Kusche, J., Neumayer, H., Biancale, R., Lemoine, J., Barthelmes, F., et al. (2008). EIGEN-GL05C-A new global combined high-resolution GRACE-based gravity field model of the GFZ-GRGS cooperation. In *Geophysical Research Abstracts*, volume 10, pages EGU2008–A.
- Förste, C., Schmidt, R., Stubenvoll, R., Flechtner, F., Meyer, U., König, R., Neumayer, K., Barthelmes, F., Esselborn, S., Biancale, R., et al. (2006). The GFZ/GRGS satellite and combined gravity field models EIGENGL04S1 and EIGEN-GL04C. *preparation for J. of Geodesy*.
- Gobinddass, M., Willis, P., de Viron, O., Sibthorpe, A., Zelensky, N., Ries, J., Ferland, R., Barthelme, Y., Diament, M., and Lemoine, F. (2009). Improving DORIS geocenter time series using an empirical rescaling of solar radiation pressure models. *Advances in Space Research*, 44(11) :1279 – 1287.
- Gourine, B. (2012). Use of Starlette and LAGEOS-1 ; -2 laser measurements for determination and analysis of stations coordinates and EOP time series . *Comptes Rendus Geoscience*, 344 :319 – 333.

- Jayles, C., Chauveau, J., and Roza, F. (2010). DORIS/Jason-2 : Better than 10cm on-board orbits available for Near-Real-Time Altimetry. *Advances in Space Research*, 46(12) :1497–1512.
- Jayles, C., Manfredi, C., Chauveau, J., Dutrey, J., and Auriol, A. (2015). Towards a millimeter accuracy : DORIS evolutions. In *Séminaire Géodésie Millimétrique*.
- Kaula, W. M. (1966). Theory of satellite geodesy. Applications of satellites to geodesy. *Waltham, Mass. : Blaisdell, 1966*, 1.
- Kuang, D., Rim, H., Schutz, B., and Abusali, P. (1996). Modeling GPS satellite attitude variation for precise orbit determination. *Journal of Geodesy*, 70(9) :572–580.
- Lejba, P. and Schillak, S. (2011). Determination of station positions and velocities from laser ranging observations to Ajisai, Starlette and Stella satellites. *Advances in Space Research*, 47(4) :654–662.
- Lemoine, F., Zelensky, N., Chinn, D., Pavlis, D., Rowlands, D., Beckley, B., Luthcke, S., Willis, P., Ziebart, M., Sibthorpe, A., Boy, J., and Luceri, V. (2010). Towards development of a consistent orbit series for TOPEX, Jason-1, and Jason-2 . *Advances in Space Research*, 46(12) :1513 – 1540. DORIS : Precise Orbit Determination and Applications to Earth Sciences.
- Lemoine, J. (2015). Précision des modèles des champ de gravité. In *Séminaire Géodésie Millimétrique*.
- Lemoine, J., Bruinsma, S., Gégout, P., Biancale, R., and Bourgogne, S. (2014). EIGEN-GRGS.RL03.MEAN-FIELD : new mean gravity field model for altimetric satellite orbit computation. In *OSTST*.
- Lemoine, J.-M. and Capdeville, H. (2006). A corrective model for Jason-1 DORIS Doppler data in relation to the South Atlantic Anomaly. *Journal of Geodesy*, 80(8-11) :507–523.
- Lestarquit, L. (2015). Amélioration des techniques GNSS pour le positionnement précis. In *Séminaire Géodésie Millimétrique*.
- Lion, G. (2013). *Dynamique des orbites fortement elliptiques*. PhD thesis, Observatoire de Paris.
- Melachroinos, S., Lemoine, F., Zelensky, N., Rowlands, D., Luthcke, S., and Bordyugov, O. (2013). The effect of geocenter motion on Jason-2 orbits and the mean sea level. *Advances in Space Research*, 51(8) :1323–1334.

- Mello, S. F. (1972). Analytical study of the Earth's shadowing effects on satellite orbits. *Celestial mechanics*, 5(1) :80–101.
- Mendes, V. and Pavlis, E. (2004). High-accuracy zenith delay prediction at optical wavelengths. *Geophysical Research Letters*, 31(14).
- Montenbruck, O., Steigenberger, P., and Hugentobler, U. (2015). Enhanced solar radiation pressure modeling for Galileo satellites. *Journal of Geodesy*, 89(3) :283–297.
- Musen, P. (1960). The influence of the solar radiation pressure on the motion of an artificial satellite. *Journal of Geophysical Research*, 65(5) :1391–1396.
- Nerem, R., Bar-Sever, Y., and Team, G. (2011). The Geodetic Reference Antenna in Space (GRASP)-A Mission to Enhance the Terrestrial Reference Frame. In *AGU Fall Meeting Abstracts*, volume 1, page 04.
- Pail, R., Bruinsma, S., Migliaccio, F., Förste, C., Goiginger, H., Schuh, W.-D., Höck, E., Reguzzoni, M., Brockmann, J. M., Abrikosov, O., et al. (2011). First GOCE gravity field models derived by three different approaches. *Journal of Geodesy*, 85(11) :819–843.
- Pail, R., Goiginger, H., Schuh, W.-D., Höck, E., Brockmann, J., Fecher, T., Gruber, T., Mayer-Gürr, T., Kusche, J., Jäggi, A., et al. (2010). Combined satellite gravity field model GOCO01S derived from GOCE and GRACE. *Geophysical Research Letters*, 37(20).
- Parkinson, R. W., Jones, H. M., and Shapiro, I. I. (1960). Effects of Solar Radiation Pressure on Earth Satellite Orbits. *Science*, 131.
- Pavlis, N. K., Holmes, S. A., Kenyon, S. C., and Factor, J. K. (2012). The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008). *Journal of Geophysical Research : Solid Earth (1978–2012)*, 117(B4).
- Pearlman, M., Altamimi, Z., Beck, N., Forsberg, R., Gurtner, W., Kenyon, S., Behrend, D., Lemoine, F., Ma, C., Noll, C., et al. (2007). GGOS Working Group on Ground Networks Communications. In *Dynamic Planet*, pages 719–726. Springer.
- Pearlman, M., Degnan, J., and Bosworth, J. (2002). The international laser ranging service. *Advances in Space Research*, 30(2) :135–143.

- Reigber, C., Schmidt, R., Flechtner, F., König, R., Meyer, U., Neumayer, K.-H., Schwintzer, P., and Zhu, S. Y. (2005). An Earth gravity field model complete to degree and order 150 from GRACE : EIGEN-GRACE02S. *Journal of Geodynamics*, 39(1) :1–10.
- Reigber, C., Schwintzer, P., Neumayer, K.-H., Barthelmes, F., König, R., Forste, C., Balmino, G., Biancale, R., Lemoine, J.-M., Loyer, S., Bruinsma, S., Perosanz, F., and Fayard, T. (2003). The CHAMP-only earth gravity field model EIGEN-2. *Advances in Space Research*, 31(8) :1883 – 1888. Integrated Space Geodetic Systems and Satellite Dynamics.
- Reigber, C., Schwintzer, P., Stubenvoll, R., Schmidt, R., Flechtner, F., Meyer, U., König, R., Neumayer, H., Forste, C., Barthelmes, F., et al. (2006). *A high resolution global gravity field model combining CHAMP and GRACE satellite mission and surface data : EIGEN-CG01C*. Geoforschungszentrum.
- Ries, J., Tapley, B., Eanes, R., Rim, H., and Ries, J. (2006). Jason-1 precision orbit verification.
- Rietbroek, R., Fritsche, M., Brunnabend, S.-E., Daras, I., Kusche, J., Schröter, J., Flechtner, F., and Dietrich, R. (2012). Global surface mass from a new combination of GRACE, modelled OBP and reprocessed GPS data. *Journal of Geodynamics*, 59 :64–71.
- Rodriguez-Solano, C., Hugentobler, U., and Steigenberger, P. (2012). Adjustable box-wing model for solar radiation pressure impacting {GPS} satellites . *Advances in Space Research* , 49 :1113 – 1128.
- Rodriguez-Solano, C., Hugentobler, U., Steigenberger, P., Blobfeld, M., and Fritsche, M. (2014). Reducing the draconitic errors in GNSS geodetic products. *Journal of Geodesy*, 88(6) :559–574.
- Rosborough, G. and Tapley, B. (1987). Radial, transverse and normal satellite position perturbations due to the geopotential. *Celestial mechanics*, 40(3-4) :409–421.
- Rudenko, S., Dettmering, D., Esselborn, S., Schöne, T., Förste, C., Lemoine, J.-M., Ablain, M., Alexandre, D., and Neumayer, K.-H. (2014). Influence of time variable geopotential models on precise orbits of altimetry satellites, global and regional mean sea level trends. *Advances in Space Research*, 54 :92–118.
- Rummel, R., Rothacher, M., and Beutler, G. (2005). Integrated global geodetic observing system (IGGOS) science rationale. *Journal of Geodynamics*, 40(4) :357–362.

- Samain, E. (2015). Lien laser et télécom optique. In *Séminaire Géodésie Millimétrique*.
- Savcenko, R. and Bosch, W. (2012). EOT11a-empirical ocean tide model from multi-mission satellite altimetry.
- Sneeuw, N. (1992). Representation coefficients and their use in satellite geodesy. *Manuscripta geodaetica*.
- Sośnica, K., Jäggi, A., Thaller, D., Beutler, G., and Dach, R. (2014). Contribution of Starlette, Stella, and AJISAI to the SLR-derived global reference frame. *Journal of Geodesy*, 88(8) :789–804.
- Sośnica, K., Thaller, D., Jäggi, A., Dach, R., and Beutler, G. (2012). Sensitivity of Lageos Orbits to Global Gravity Field Models. *Artificial Satellites*, 47 :47–65.
- Springer, T., Beutler, G., and Rothacher, M. (1999). A new solar radiation pressure model for GPS . *Advances in Space Research*, 23(4) :673 – 676. Satellite Dynamics, Orbit Analysis and Combination of Space Techniques .
- Stepánek, P., Dousa, J., Filler, V., and Hugentobler, U. (2010). DORIS data analysis at Geodetic Observatory Pecny using single-satellite and multi-satellite geodetic solutions. *Advances in Space Research*, 46 :1578–1592.
- Tapley, B., Ries, J., Bettadpur, S., Chambers, D., Cheng, M., Condi, F., Gunter, B., Kang, Z., Nagel, P., Pastor, R., et al. (2005). GGM02–An improved Earth gravity field model from GRACE. *Journal of Geodesy*, 79(8) :467–478.
- Tapley, B. D., Watkins, M., Ries, J., Davis, G., Eanes, R., Poole, S., Rim, H., Schutz, B., Shum, C., Nerem, R., et al. (1996). The joint gravity model 3. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth (1978–2012)*, 101(B12) :28029–28049.
- Tavernier, G., Fagard, H., Feissel-Vernier, M., Lemoine, F., Noll, C., Ries, J., Soudarin, L., and Willis, P. (2005). The international DORIS service. *Advances in Space Research*, 36(3) :333–341.
- Vokrouhlicky, D., Farinella, P., and Mignard, F. (1993). Solar radiation pressure perturbations for Earth satellites. 1 : A complete theory including penumbra transitions. *Astronomy and Astrophysics*, 280 :295–312.

- Wigner, E. P. (1959). *Group theory and its application to the quantum mechanics of atomic spectra*. Academic Press, INC.
- Willis, P., Bock, O., and Bar-Sever, Y. E. (2013). DORIS Tropospheric Estimation at IGN : Current Strategies, GPS Intercomparisons and Perspectives. *Earth on the Edge : Science for a Sustainable Planet : Proceedings of the IAG General Assembly, Melbourne, Australia, June 28-July 2, 2011*, 139 :11.
- Willis, P., Haines, B., Berthias, J., Sengenès, P., and Le Mouél, J. (2004). Behavior of the DORIS/-Jason oscillator over the South Atlantic Anomaly. *Comptes Rendus Geoscience*, 336(9) :839–846.
- Wu, X., Ray, J., and van Dam, T. (2012). Geocenter motion and its geodetic and geophysical implications. *Journal of Geodynamics*, 58 :44–61.
- Zarrouati (1987). *Trajectoires Spatiales*. Cepadues Editions.
- Zelensky, N. P., Lemoine, F. G., Chinn, D. S., Melachroinos, S., Beckley, B. D., Beall, J. W., and Bordyugov, O. (2014). Estimated SLR station position and network frame sensitivity to time-varying gravity. *Journal of Geodesy*, 88(6) :517–537.
- Zelensky, N. P., Lemoine, F. G., Ziebart, M., Sibthorpe, A., Willis, P., Beckley, B. D., Klosko, S. M., Chinn, D. S., Rowlands, D. D., Luthcke, S. B., Pavlis, D. E., and Luceri, V. (2010). DORIS/SLR POD modeling improvements for Jason-1 and Jason-2. *Advances in Space Research*, 46(12) :1541 – 1558. DORIS : Precise Orbit Determination and Applications to Earth Sciences.
- Zenner, L., Gruber, T., Jäggi, A., and Beutler, G. (2010). Propagation of atmospheric model errors to gravity potential harmonics-impact on GRACE de-aliasing. *Geophysical Journal International*, 182(2) :797–807.
- Ziebart, M. and Dare, P. (2001). Analytical solar radiation pressure modelling for GLONASS using a pixel array. *Journal of Geodesy*, 75(11) :587–599.